Mean Field Equilibrium Asset Pricing Models With Exponential Utility

(指数型効用における平均場均衡資産価格形成モデル)

関根 雅 (Masashi Sekine)[1]

東京大学大学院経済学研究科 博士課程

令和 8 年 1 月 27 日

[1]The latest version is available at https://masashi-sekine.github.io/

本資料について

この資料は発表者の博士論文 Mean Field Equilibrium Asset Pricing Models With Exponential Utility (邦題：指数型効用における平均場均衡資産価格形成モデル) の内容を日本語でまとめたものである.

※本研究は JSPS 特別研究員奨励費 JP23KJ0648 の助成を受けたものである.

要旨

研究の目的

多数の異質な投資家が参加する金融市場における証券の均衡リスクプレミアムを動的に分析したい.

本研究の考え方

- 市場には異なる性質を持った投資家がたくさんいる.
- 各投資家は, 所与とした市場環境に対し自己の効用が最大になるように投資戦略を決定する.
- 各投資家の最適取引戦略の需給が一致するような証券リスクプレミアムを探索する.

Chapter 1. Introduction

背景と問題意識

- 所与とした市場環境に対する最適化問題や価格付け問題に対する研究 (e.g. 最適ポートフォリオ問題, デリバティブ価格付け問題など) に対して本研究では, 投資家の性質を所与とした時の市場環境がどのようになるか, ということを分析したい.
- つまり, 多数の投資家の特徴を考え, それらが相互作用（競争や協調）しながら取引を行っている市場の状態 (特に均衡状態) を調べたい.
- 金融市場は、多数の投資家が自身の利得を最大化するために日々取引を行う「多人数ゲーム」の場として捉えることができる.
- しかし多人数ゲームの均衡解の厳密な分析は複雑に連立した最適制御問題につながるため, 数学的に困難である.

研究手法

- Lasry & Lions (2007), Huang, Malhamé, & Caines (2006) が「平均場ゲーム理論 (MFG)」を提唱した.
- MFG は多人数ゲーム問題を最適制御問題と固定点問題に帰着させ, 均衡の近似解を提供する枠組みである.
- 一方で Carmona & Delarue (2013) は FBSDE を使った確率論的アプローチにより MFG を定式化した.
- 本論文では確率論的アプローチで MFG の枠組みを使った資産価格形成モデルを提案する.
- しかし, Carmona & Delarue (2013) では FBSDE の可解性を保証するため, 効用関数や状態変数に強い仮定を置く必要がある.
- 特にその枠組みでは, 経済学でよく用いられる指数型効用は扱えなかった.

研究手法

- 他方で, Hu, Imkeller, & Müller (2005) は, マルチンゲールの性質を使って不完備市場における指数型, 冪型, 対数型といったクラスの効用関数の動的確率的最適化問題を解いた.
- この研究では, 最適制御を特徴付ける方程式として「二次成長型 BSDE (qg-BSDE)」を取り扱う.
- qg-BSDE の可解性や一般的性質については Kobylanski (2000) がよく知られている.
- Hu, Imkeller, & Müller (2005) の手法は, 指数型効用関数の最適化問題から均衡モデルを考案する上で極めて重要な役割を担う.

研究目的と主な貢献

- 前述の通り本研究の目的は, 平均場ゲーム理論を応用して不完備市場における資産価格モデルを構築することである.
- 本研究の主要な貢献は下記のとおりである:
  1. 新しい型の平均場 qg-BSDE を導出し, その解の存在を証明した.
  2. 上記の BSDE の解が市場均衡を特徴付けることを示した.
  3. 半解析的解が得られる枠組みで均衡モデルを再定式化した.
  4. モデルの拡張: 消費・習慣形成付き均衡モデルおよび部分観測市場における均衡モデルを構築した.

博士論文の構成

- Chapter 1
  - 背景と問題意識
  - 本論文の目的と研究手法および主要な貢献の解説
- Chapter 2
  - 本論文で使用する主な記法の定義
- Chapter 3
  - 先行研究のレビュー
  - Fujii & Takahashi (2022) との対比
- Chapter 4
  - Fujii & Sekine (2024) に基づく, 指数型効用における均衡モデルの紹介

博士論文の構成

- Chapter 5
  - Fujii & Sekine (2025) に基づく, 消費・習慣形成付き均衡モデルの紹介
- Chapter 6
  - Sekine (2025) に基づく, 部分観測市場における均衡モデルの紹介
- Chapter 7
  - 結論と今後の展望に関する提案

Chapter 2. Notation

Notation

本論文では, $T > 0$ について $[0, T]$ の有限時間区間上で議論をする．また, 通常の設定 (usual conditions) を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}\ (:= (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}))$ と $\mathbb{R}$ 上の線型空間 E について, 次の記法を使用する．

(1) $\mathcal{T}(\mathbb{F})$ は $[0, T]$ 上の $\mathbb{F}$-停止時刻の集合である．

(2) $\mathbb{L}^0(\mathcal{F}, E)$ は E-値 $\mathcal{F}$-可測な確率変数の集合である．

(3) $\mathbb{L}^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}, E)$ は E-値 $\mathcal{F}$-可測な確率変数 ξ で以下を満たすものの集合である．

$$\|\xi\|_2 := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|\xi|^2]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(4) $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{P}, \mathcal{F}, E)$ は E-値 $\mathcal{F}$-可測な確率変数 ξ で以下を満たすものの集合である．

$$\|\xi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)| < \infty.$$

Notation

(5) $\mathbb{L}^0(\mathbb{F}, E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-発展的可測な確率過程の集合である.
(6) $\mathbb{H}^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}, E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-発展的可測な確率過程 X で以下を満たすものの集合である.

$$\|X\|_{\mathbb{H}^2} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(7) $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{P}, \mathbb{F}, E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-発展的可測な確率過程 X で以下を満たすものの集合である.

$$\|X\|_{\mathbb{L}^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} |X_t(\omega)| < \infty.$$

(8) $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}, \mathbb{F}, E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-発展的可測過程 X で以下を満たすものの集合である.

$$\|X\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}} := \sup_{\tau\in\mathcal{T}(\mathbb{F})} \left\|\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_\tau^T |X_t|^2 dt \middle| \mathcal{F}_\tau\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty < \infty.$$

$\|\cdot\|_\infty$ は $\mathbb{P}$-本質的上限を表す.

Notation

(9) $\mathbb{S}^2(\mathbb{P},\mathbb{F},E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-適合で連続な確率過程 X で以下を満たすものの集合である.

$$\|X\|_{\mathbb{S}^2} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(10) $\mathbb{S}^\infty(\mathbb{P},\mathbb{F},E)$ は E-値 $\mathbb{F}$-適合で連続な確率過程 X で以下を満たすものの集合である.

$$\|X\|_{\mathbb{S}^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} |X_t(\omega)| < \infty.$$

(11) $\mathcal{C}([0,T],E)$ は連続関数 $f:[0,T]\to E$ の集合である.
(12) $\mathcal{C}^1([0,T],E)$ は 1 階連続微分可能関数 $f:[0,T]\to E$ の集合である.
(13) $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}^n_+ := \{x\in\mathbb{R}^n; x\geq 0\}$, $\mathbb{R}^n_{++} := \{x\in\mathbb{R}^n; x>0\}$ と置く. ここで $x\geq 0$ や $x>0$ は x の全成分が非負または正であることを言う. $\mathbb{M}_n$ は n 次正方行列全体の集合である.

Chapter 3. A Review of the Recent Research

Chapter 3 では最近の関連研究を紹介しているが, 特に Fujii & Takahashi (2022) のモデルや結果を詳細にレビューし, 本研究との対比を行った.
Fujii & Takahashi (2022) [Section 1-5] の要約は以下の通り:

(1) エージェントの最適在庫管理問題を定式化した. 具体的には、各エージェントは「在庫量」を状態変数,「取引速度」を制御変数とし、コスト関数は取引コストや在庫量に対するペナルティなどで構成される。
(2) この確率最適制御問題を Pontryagin の最大値原理の枠組みを用いて解いた。その解は、一意な解を持つことが示される前進後退確率微分方程式（FBSDE）によって特徴付けられた。
(3) 市場均衡条件 (Market clearing condition) の概念を導入し、多人数極限における均衡価格のヒューリスティックな導出を行った。
(4) 上記 (3) の導出結果を (2) の FBSDE に代入することにより、McKean-Vlasov 型の FBSDE を提示した。そして、Peng & Wu (1999) の手法を用いて、その FBSDE の可解性を証明した。
(5) 以上の結果に基づき、(3) の価格過程が $N \to \infty$ の際、実際に市場均衡条件を満たすことを示した。

	Fujii & Takahashi (2022)	本研究
設定	最適在庫管理	指数型効用最大化
最適制御の手法	Pontryagin の最大値原理	Hu et al (2005) の方法
エージェントの相互作用	市場均衡条件 (Market clearing condition)	
流動性への制限	取引コスト	なし
関連方程式	McKean-Vlasov 型 FBSDE	平均場二次成長 BSDE
結果	均衡価格	均衡リスクプレミアム

Chapter 4. Mean Field Equilibrium Asset Pricing Model in an Incomplete Market

※本節は

- M. Fujii & M. Sekine, 2024, Mean-field equilibrium price formation with exponential utility, Stoch. Dyn.

の内容に基づく.

本節の主な内容

市場を通じた投資家同士の相互作用を考慮した連続時間多人数ゲームとしての資産価格形成モデルを構築する.

Section 4.2：最適投資問題

- 与えられたリスクプレミアムに対する各投資家の最適投資戦略を明らかにする．（指数型効用の最大化問題）

Section 4.3, 4.4：市場均衡モデル

- 最適投資戦略のトータルの買いと売りがネットで零になる（＝需要と供給の均衡）ようなリスクプレミアムを求める.
- 均衡リスクプレミアムを特徴付ける方程式 (平均場 BSDE) を解析する.

エージェントの最適制御問題

市場には N 人の投資家（エージェント）がいる．各エージェントは，一定期間 $[0, T]$ にわたって証券投資をする．終端時刻での純資産残高に対する効用を設定する．

投資家の最適制御問題

各エージェント i $(i = 1, \dots, N)$ についてそれぞれ，効用関数 $U^i(\pi)$ を最大化する self-financing な投資戦略 $\pi^{i,*}$ を見つける．

最適戦略 $\pi^{i,*}$ は，リスクプレミアム θ に依存する形で与えられる．

$U^i(\pi)$
を最大化する
投資戦略 $\pi^{i,*}$ を見つける．

確率空間

$i = 1, \cdots, N$ について

1. $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}^0_t)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 Brown 運動 $W^0 := (W^0_t)$ から生成される完備右連続フィルトレーション. $\mathcal{F}^0 := \mathcal{F}^0_T$.
2. $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^i := (\mathcal{F}^i_t)_{t\in[0,T]}$: d-次元 Brown 運動 $W^i := (W^i_t)$ と σ-加法族 $\sigma(\xi^i, \gamma^i)$ により生成される完備右連続フィルトレーション ($\mathcal{F}^i_0$ は $\sigma(\xi^i, \gamma^i)$ の完備化.). $\mathcal{F}^i := \mathcal{F}^i_T$. ξ^i, γ^i は $\mathbb{R}$-値, $\mathbb{R}_{++}$-値確率変数.
3. $(\Omega^{0,i}, \mathcal{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$ は $\Omega^{0,i} := \Omega^0 \times \Omega^i$ 上の完備確率空間. $(\mathcal{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$ は $(\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^0 \otimes \mathbb{P}^i)$ の完備化で, $\mathbb{F}^{0,i} := (\mathcal{F}^{0,i}_t)_{t\in[0,T]}$ は $(\mathcal{F}^0_t \otimes \mathcal{F}^i_t)_{t\in[0,T]}$ により生成される完備右連続フィルトレーション.

エージェントの最適投資問題

Assumption 4.2.1 (市場の設定)

(i) 無リスク金利は零とする.
(ii) $n \in \mathbb{N}$ 個の無配当証券. 価格過程は

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)(\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

- $S_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$: 初期価格
- $W^0 := (W_t^0)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 BM. 市場参加者に共通のノイズ（コモンノイズ）
- $\mu := (\mu_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$: $\mathbb{R}^n$-値, $\mathbb{F}^0$-発展的可測.
- $\sigma := (\sigma_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^\infty$: $\mathbb{R}^{n\times d_0}$-値, $\mathbb{F}^0$-発展的可測, full rank, $n \le d_0$.
- $\underline{\lambda} I_n \le (\sigma_t \sigma_t^\top) \le \overline{\lambda} I_n$ を満たす. （$0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda} < \infty$）
- リスクプレミアム過程 $\theta_t := \sigma_t^\top (\sigma_t \sigma_t^\top)^{-1} \mu_t$, （$t \in [0, T]$.）

エージェントの最適投資問題

Assumption 4.2.6 (エージェントの設定)

$i = 1, \cdots, N$ について
(i) ξ^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測確率変数. エージェント i の初期資産.
(ii) γ^i は $\mathbb{R}_{++}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測確率変数.

$$\underline{\gamma} \leq \gamma^1 \leq \overline{\gamma} \tag{2}$$

を満たす. $(0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma})$. γ^i はエージェント i の絶対的リスク回避度.
(iii) F^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_T^{0,i}$-可測確率変数. エージェント i の時刻 T における負債.
(iv) エージェント i はプライステイカー.

効用最大化問題 (for エージェント i)

$$\sup_{p\in\mathcal{A}^i} \mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p} - F^i)\right)\right] \tag{3}$$

subject to

$$\mathcal{W}_t^{i,\pi} := \xi^i + \int_0^t \pi_r^\top \mathrm{diag}(S_r)^{-1} dS_r = \xi^i + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s \theta_s ds + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s dW_s^0 \tag{4}$$

- $W^i := (W_t^i)_{t\in[0,T]}$: d-次元 BM. エージェント i 固有のノイズ.
- $\pi := (\pi_t)_{t\in[0,T]}$: 各証券への投資金額. $\mathbb{R}^n$-値, $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測過程.
- $p_t := \pi_t^\top \sigma_t$ と書く. $L_s := \{u^\top \sigma_s; u \in \mathbb{R}^{d_0}\} \subset \mathbb{R}^{1\times d_0}$ とおくと, 各 $s \in [0, T]$ について $p_s \in L_s$.
- 許容空間 $\mathcal{A}^i$ は, $\left\{\exp\left(-\gamma^i \mathcal{W}_\tau^{i,p}\right); \tau \in \mathcal{T}^{0,i}\right\}$ が一様可積分となる戦略 p の集合.
- ξ^i : 初期資産.
- γ^i : 絶対的リスク回避度.
- F^i : 終端時間における負債.

最適制御問題の求解

効用最大化問題 (for エージェント i)

$$\sup_{p\in\mathcal{A}^i}\mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p}-F^i)\Big)\Big] \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\qquad \mathcal{W}_t^{i,p}=\xi^i+\int_0^t p_s\theta_s ds+\int_0^t p_s dW_s^0 \tag{6}$$

最適戦略の導出には Hu, Imkeller, & Müller (2005) の方法を用いる.

Definition 4.2.10 (Condition-R)

次の条件を満たす確率過程の集合 $\{(R_t^{i,p})_{t\in[0,T]}; p\in\mathcal{A}^i\}$ を見つける.

- (i) 任意の $p\in\mathcal{A}^i$ について $R_T^{i,p}=-\exp(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p}-F^i))$ a.s. となる.
- (ii) ある $\mathcal{F}_0^i$ -可測確率変数 R_0^i が存在し, 任意の $p\in\mathcal{A}^i$ について $R_0^{i,p}=R_0^i$ a.s. となる. (つまり $R^{i,p}$ は時刻 0 において戦略に独立となる.)
- (iii) 任意の $p\in\mathcal{A}^i$ について $R^{i,p}$ は $(\mathbb{F}^{0,i},\mathbb{P}^{0,i})$-supermartingale であり, ある $p^*\in\mathcal{A}^i$ が存在して R^{i,p^*} が $(\mathbb{F}^{0,i},\mathbb{P}^{0,i})$-martingale となる.

最適制御問題の求解

Condition-R

- (i) 任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について $R_T^{i,p} = -\exp(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p} - F^i))$ a.s. となる.
- (ii) ある $\mathcal{F}_0^i$ -可測確率変数 R_0^i が存在し，任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について $R_0^{i,p} = R_0^i$ a.s. となる. (つまり $R^{i,p}$ は時刻 0 において戦略に独立となる.)
- (iii) 任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について $R^{i,p}$ は $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-supermartingale であり，ある $p^* \in \mathcal{A}^i$ が存在して R^{i,p^*} が $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-martingale となる.

このような $\{(R_t^{i,p})_{t\in[0,T]}; p \in \mathcal{A}^i\}$ があったとき，p^* が最適解となる. 実際，任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p} - F^i)\Big)\Big] &= \mathbb{E}[R_T^{i,p}] && \text{(by (i))} \\
&\le \mathbb{E}[R_0^i] && \text{(by (ii), (iii))} \\
&= \mathbb{E}[R_T^{i,p^*}] && \text{(by (ii), (iii))} \\
&= \mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,p^*} - F^i)\Big)\Big] && \text{(by (i)).}
\end{aligned} \tag{7}
$$

最適制御問題の求解

そのような $\{(R_t^{i,p})_{t\in[0,T]}; p \in \mathcal{A}^i\}$ は, 次のような形をしているとアテをつける.

$$R_t^{i,p} = -\exp(-\gamma^i(\mathcal{W}_t^{i,p} - Y_t^i)), \quad t \in [0, T].$$

ただし, Y^i は戦略 p に依存しない確率過程で, 次の BSDE で与えられる.

$$Y_t^i = F^i + \int_t^T f(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i. \tag{8}$$

実際こうすると Condition-R の (i), (ii) は満たされる. (iii) を満たすようなドライバー f を見つける.

最適制御問題の求解

Condition-R

- (iii) 任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について $R^{i,p}$ は $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-supermartingale であり, ある $p^* \in \mathcal{A}^i$ が存在して R^{i,p^*} が $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-martingale となる.

そのためには, $R^{i,p}$ のドリフトが

- 任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について非正
- ある $p^* \in \mathcal{A}^i$ が存在して零

となる必要がある. $R^{i,p}$ に伊藤の公式を適用して上記を満たすように f を選ぶと

$$f(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) = -Z_s^{i,0\|}\theta_s - \frac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2)$$

となることがわかる. ここで $x \in \mathbb{R}^{1\times d_0}$ に対し, $x_s^{\|}$ で x の L_s への射影を表す. $x_s^{\perp} := x - x_s^{\|}$ とおく.

最適制御問題の求解

よって $\{(R_t^{i,p})_{t\in[0,T]}; p \in \mathcal{A}^i\}$ は, 次のように与えられる.

$$R_t^{i,p} = -\exp(-\gamma^i(\mathcal{W}_t^{i,p} - Y_t^i)), \quad t \in [0, T].$$

ただし, Y^i は次の BSDE で与えられる.

$$\begin{aligned} Y_t^i =& F^i + \int_t^T \left(-Z_s^{i,0\|}\theta_s - \frac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2)\right) ds \\ & - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i. \end{aligned} \tag{9}$$

この二次成長型 BSDE の well-posedness を示す必要がある.

最適制御問題の求解

Corollary 4.2.14 & Theorem 4.2.15

Assumptions 4.2.1, 4.2.6 のもと, BSDE:

$$\begin{aligned} Y_t^i =& F^i + \int_t^T \left(-Z_s^{i,0\|}\theta_s - \frac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) \right) ds \\ & - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i \end{aligned} \tag{10}$$

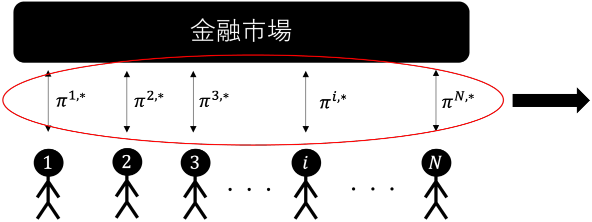
は一意な解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i)$ を持つ. そして, 以下で定められる確率過程 $p^{i,*} := (p_t^{i,*})_{t\in[0,T]}$

$$p_t^{i,*} := (\pi_t^{i,*})^\top \sigma_t := Z_t^{i,0\|} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^i}, \quad t \in [0, T] \tag{11}$$

はエージェント-i の最適投資戦略である.

市場均衡モデル

全エージェントが，それぞれ最適に投資をしているとしたときの証券の需要と供給が均衡するようなリスクプレミアム過程 θ を具体的に求めたい．



買い注文と売り注文がネットで零になる（需給が一致する）ような証券価格を求めたい！

均衡条件：$\sum_{I=1}^{N} \pi^{i,*} = 0$

※ $\pi^{i,*}$はエージェントiの最適投資戦略

市場均衡条件を通した，投資家間の相互作用が生まれる！

市場均衡モデル

多人数の均衡モデルを考える上で下記の仮定を追加する.

Assumption 4.3.2.

(i) $\{(\xi^i, \gamma^i), 1 \le i \le N\}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で i.i.d.
(ii) $\{F^i, 1 \le i \le N\}$ は $\mathcal{F}^0$-条件付 i.i.d.

- ξ^i : エージェント i の初期資産. $\mathcal{F}_0^i$-可測.
- γ^i : エージェント i の資産に関する絶対的リスク回避度. 有界確率変数, $\underline{\gamma} \le \gamma^i \le \overline{\gamma}$. $\mathcal{F}_0^i$-可測.
- F^i : 時刻 T におけるエージェント i の負債. 有界確率変数. $\mathcal{F}_T^{0,i}$-可測.

市場均衡モデル

Definition 4.3.3.（Market-clearing condition）

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\pi_t^{i,*} = 0, \quad dt \otimes \mathbb{P}\text{-a.e.} \tag{12}$$

ここで, $\pi_t^{i,*}$ はエージェント i の最適投資戦略である.

$\pi_t^{i,*}$ は各証券への投資金額であったから, 市場均衡条件は

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\pi_t^{i,*} = \frac{1}{N}\mathrm{diag}(\alpha)S_t$$

とも考えられる. ここで $\alpha \in \mathbb{N}^n$ は各証券の発行済株式数である. (よって右辺は (時価総額)/N と解釈できる.) ただし, 後に見るように本研究では $N \to \infty$ の場合を取り扱うため, 均衡条件は α が N に依存する場合を除いて Definition 4.3.3. と同じになる.

市場均衡モデル

最適戦略は $p_t^{i,*} := (\pi_t^{i,*})^\top \sigma_t = Z_t^{i,0\|} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^i}$ であったから，均衡条件の下では

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(Z_t^{i,0\|} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^i}\Big) = 0 \tag{13}$$

と期待される．形式的に θ について解いてみると

$$\theta_t = -\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\gamma^i}\Big)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_t^{i,0\|})^\top \tag{14}$$

ここで，各 $(\mathcal{F}_t^i)_{i\geq 1}$ の独立性とエージェントの対称性を思い出すと，多人数極限（$N\to\infty$）においてはエージェントに特異な情報は（大数の法則的に）解消されるのでは？と予想できる．そこで形式的に

$$\theta_t = -\hat{\gamma}\mathbb{E}[Z_t^{i,0\|}|\mathcal{F}^0]^\top, \quad t\in[0,T], \quad \hat{\gamma} := \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\gamma^i}\Big]^{-1}, \tag{15}$$

が，多人数極限（$N\to\infty$）において市場均衡を達成するリスクプレミアムであると期待できる．これを BSDE (10) に代入してみると...

市場均衡モデル：平均場 BSDE の性質

平均場 BSDE

$$Y_t^i = F^i + \int_t^T \Big(\hat{\gamma} Z_s^{i,0\|} \mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]^\top - \frac{\hat{\gamma}^2}{2\gamma^i} |\mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]|^2 + \frac{\gamma^i}{2} (|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) \Big) ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i, \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

平均場 BSDE (60) の解の存在や一意性について，一般的な結果は知られていない．

平均場 BSDE の性質

一般的考察を阻む要因として次の事項が挙げられる.

- 比較原理が成立しないこと
  → 実は $\mathbb{E}[Z_t]$ が絡む平均場 BSDE に関する比較原理自体が知られていない. よって Kobylanski の方法のように比較原理を使って Y の単調列を作る方法が使えない.
- 解に関する *a priori* estimate や stability に関する性質が（通常の手法では）得られない.

本論文では終端条件 F^i の $\mathbb{L}^\infty$ ノルムの大きさに制限をおくことで解の存在について示した. (Tevzadze (2008) の方法)

市場均衡モデル：平均場 BSDE の性質

仮定

各 $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して, $\|F^i\|_\infty < \dfrac{1}{48 C_\gamma}$ とする. C_γ は 式 (4.3.12) の定数で, $\overline{\gamma}, \underline{\gamma}, \widehat{\gamma}$ に依存する定数である.

Theorem 4.3.9

Assumption 4.2.6 及び上の仮定もと, 平均場 BSDE (60) は有界な解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i) \in \mathbb{S}^\infty(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d_0}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d})$ を持つ.

市場均衡モデル：漸近的市場均衡のチェック

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $\Omega := \prod_{i=0}^{\infty} \Omega^i$, $\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}^i\right)$ の完備化 $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定められる完備確率空間とする．フィルトレーション $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ は $(\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$ の完備右連続化である．

Theorem 4.4.1

Assumptions 4.2.1, 4.2.6, 4.3.2 を仮定する．さらに平均場 BSDE (60) が有界な解を持つと仮定し，そのうちの一つ $(\mathcal{Y}^1, \mathcal{Z}^0, \mathcal{Z}^1)$ を任意に選んで固定する．リスクプレミアム過程を $\theta_t^{\mathrm{mfg}} := -\hat{\gamma}\mathbb{E}[\mathcal{Z}_t^{0\|}|\mathcal{F}^0]^\top$ $(t \in [0, T])$ で定義する．このとき，

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \pi_t^{i,*} \right|^2 dt = 0. \tag{17}$$

が成り立つ．ここで，$\pi_t^{i,*}$ はエージェント i の最適投資戦略である．

特殊条件における解の存在

平均場 BSDE(16) を次のようにリスケールする：

$$(y^i, z^{0,i}, z^i) := (\gamma^i Y^i, \gamma^i Z^{0,i}, \gamma Z^i), G = \gamma^i F^i.$$

すると, 平均場 BSDE(16) は次のようにかける.

$$\begin{aligned} y_t^i =& G^i + \int_t^T \Big(\widehat{\gamma} z_s^{0,i\|} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\gamma^i} z_s^{0,i\|} | \mathcal{F}^0 \Big]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2} \Big| \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\gamma^i} z_s^{0,i\|} | \mathcal{F}^0 \Big] \Big|^2 \\ &+ \frac{1}{2} (|z_s^{0,i\perp}|^2 + |z_s^i|^2) \Big) ds - \int_t^T z_s^{0,i} dW_s^0 - \int_t^T z_s^i dW_s^i, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{18}$$

特殊条件における解の存在

Assumption 4.3.11

終端における負債 $G^i(=\gamma^i F^i)$ が

$$G^i = G^0 + G^i$$

とかけるとする. ここで, $G^0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{F}_T^0, \mathbb{R})$, $G^i \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{F}_T^i, \mathbb{R})$ とする.

このとき, 次が言える.

Theorem 4.3.13

Assumptions 4.2.6, 4.3.11 のもと, 平均場 BSDE (16) は有界な解を持つ.

Example 4.3.15

$G^0 := \int_0^T (ax_t^2 + bx_t)dt$ で与えられるとする．ただし，$a \le 0$, $b \in \mathbb{R}$ であり，$x \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}^0, \mathbb{R})$ は

$$dx_t = (\alpha x_t + \beta)dt + \delta dW_t^0, \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

とする．ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ および $\delta \in \mathbb{R}^{1\times d_0}$ とする．このとき，

$$\mathbb{E}[\exp(G^0)|\mathcal{F}_t^0] = \exp\Big(A(t,T)x_t^2 + B(t,T)x_t + C(t,T) + \int_0^t (ax_s^2 + bx_s)ds\Big)$$

が言える．ここで，

$$A(t,T) = \frac{-a(e^{(\rho^+-\rho^-)(T-t)} - 1)}{\rho^- e^{(\rho^+-\rho^-)(T-t)} - \rho^+},$$

$$B(t,T) = \int_t^T \exp\Big(\int_t^s (\alpha + 2|\delta|^2 A(u,T))du\Big)(2\beta A(s,T) + b)ds, \quad (19)$$

$$C(t,T) = \int_t^T \Big\{|\delta|^2 A(s,T) + \Big(\beta + \frac{1}{2}|\delta|^2 B(s,T)\Big)B(s,T)\Big\}ds,$$

ただし $\rho^\pm := \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2a|\delta|^2}$.

よって,

$$
\begin{aligned}
y_t^0 &= \log \mathbb{E}[\exp(G^0)|\mathcal{F}_t^0] \\
&= A(t,T)x_t^2 + B(t,T)x_t + C(t,T) + \int_0^t (ax_s^2 + bx_s)ds, \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{20}
$$

y^0 に伊藤の公式を適用し

$$
z_t^0 = (2A(t,T)x_t + B(t,T))\delta, \quad t \in [0,T].
$$

を得る．したがって

$$
\theta_t^{\mathrm{mfg}} = -(z_t^{0\|})^\top = -(2A(t,T)x_t + B(t,T))\Pi_t(\delta)^\top, \quad t \in [0,T].
$$

特に $a = 0$ の場合,

$$A(t, T) \equiv 0, \quad B(t, T) = \frac{b}{\alpha}(e^{\alpha(T-t)} - 1),$$

であり, $\theta_t^{\mathrm{mfg}} = -B(t, T)\Pi_t(\delta)^\top$ $(t \in [0, T])$. さらに,

$$G^0 = b\int_0^T \{e^{\alpha t}x_0 + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\}dt + \int_0^T z_t^0 dW_s^0$$

が示せる. また, $\mu_t^{\mathrm{mfg}} := \sigma_t\theta_t^{\mathrm{mfg}} = -\sigma_t(z_t^0)^\top$ $(t \in [0, T])$ である. 特に $\mu_t^{\mathrm{mfg}(k)}$, $\sigma_t^{(k)}$ でそれぞれ μ_t^{mfg} と σ_t の k 番目の要素または k 番目の行ベクトルを表すとすると

$$\mu_t^{\mathrm{mfg}(k)} = -\sigma_t^{(k)}(z_t^0)^\top, \quad t \in [0, T].$$

である.

次の観察が得られる:

- $\sigma_t^{(k)}(z_t^0)^\top > 0$ のとき, k 番目の証券のリターン $\mu_t^{\mathrm{mfg}(k)}$ は負になる. この状況は $\sigma_t^{(k)} dW_t^0$ と $z_t^0 dW_t^0$ に正の相関がある状況であり, そのような場合においては k 番目の証券の保有が負債 G^0 のヘッジに寄与する. このような時はリターンが低くてもエージェントはその証券を買う.
- 逆に, $\sigma_t^{(k)}(z_t^0)^\top \leq 0$ のとき, k 番目の証券のリターン $\mu_t^{\mathrm{mfg}(k)}$ は非負になる. $\sigma_t^{(k)} dW_t^0$ と $z_t^0 dW_t^0$ に負の相関があるときは, k 番目の証券の保有は負債 G^0 のヘッジに逆効果であるから, エージェントはそのような証券に対しては高いリターンを要求する.

Chapter 4 のまとめ

- Hu, Imkeller, & Müller (2005) の手法を使って指数効用最大化問題を求解（非有界な θ に対応）した.
- 多人数極限を取るアイデアから平均場 BSDE を導出し, 解の存在について示した.
- 平均場 BSDE の解によって表されるリスクプレミアム過程が多人数極限において市場均衡を達成することを示した.

Chapter 5. Mean Field Equilibrium Asset Pricing Model With Habit Formation

※本節は

- M. Fujii & M. Sekine, 2025, Mean field equilibrium asset pricing model with habit formation, APFM.

の内容に基づく.

本節の主な内容

Chapter 4 のモデルを応用し, エージェントの消費・習慣形成を考慮した均衡モデルを分析する.

Section 5.2：最適投資・消費問題

効用（指数型効用）最大化問題を通じてエージェントの最適投資・消費戦略を導出する.

Section 5.3：市場均衡モデル

市場の需給均衡を達成するリスクプレミアム過程 θ を内生的に導出する.

Section 5.4：EQG モデル

上記の均衡モデルを半解析的な解を得られる形で再定式化する.

Section 5.5：モデルの拡張

上記モデルの拡張を紹介する.

確率空間

$i = 1, \cdots, N$ について

1. $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}_t^0)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 Brown 運動 $W^0 := (W_t^0)$ から生成される完備右連続フィルトレーション. $\mathcal{F}^0 := \mathcal{F}_T^0$.
2. $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^i := (\mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$: d-次元 Brown 運動 $W^i := (W_t^i)$ と σ-加法族 $\sigma(\xi^i, \gamma^i, \beta^i, X_0^i, F_0^i)$ により生成される完備右連続フィルトレーション ($\mathcal{F}_0^i$ は $\sigma(\xi^i, \gamma^i, \beta^i, X_0^i, F_0^i)$ の完備化.). $\mathcal{F}^i := \mathcal{F}_T^i$. ξ^i, X_0^i, F_0^i は $\mathbb{R}$-値, γ^i, β^i は $\mathbb{R}_{++}$-値確率変数.
3. $(\Omega^{0,i}, \mathcal{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$ は $\Omega^{0,i} := \Omega^0 \times \Omega^i$ 上の完備確率空間. $(\mathcal{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$ は $(\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^0 \otimes \mathbb{P}^i)$ の完備化で, $\mathbb{F}^{0,i} := (\mathcal{F}_t^{0,i})_{t\in[0,T]}$ は $(\mathcal{F}_t^0 \otimes \mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$ により生成される完備右連続フィルトレーション.

エージェントの最適投資・消費問題

Assumption 5.2.1 (市場の設定)

(i) 無リスク金利は零とする.
(ii) $n \in \mathbb{N}$ 個の無配当証券. 価格過程は

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)(\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]. \tag{21}$$

- $S_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$: 初期価格
- $W^0 := (W_t^0)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 BM. コモンノイズ.
- $\mu := (\mu_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$: $\mathbb{R}^n$-値, $\mathbb{F}^0$-発展的可測.
- $\sigma := (\sigma_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^\infty$: $\mathbb{R}^{n\times d_0}$-値, $\mathbb{F}^0$-発展的可測, フルランク. $n \le d_0$.
- $\underline{\lambda} I_n \le \sigma_t \sigma_t^\top \le \overline{\lambda} I_n$ を満たす. $(0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda} < \infty)$
- リスクプレミアム過程 $\theta_t := \sigma_t^\top (\sigma_t \sigma_t^\top)^{-1} \mu_t$, $(t \in [0, T].)$

エージェントの最適投資問題

Assumption 5.2.4 (エージェントの設定)

$i = 1, \cdots, N$ について (i) ξ^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測な確率変数であり, エージェント i の初期資産を表す.
(ii) γ^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測な確率変数であり $\underline{\gamma} \leq \gamma^i \leq \overline{\gamma}$ を満たす. ここで, $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma}$ とする. γ^i はエージェント１の資産に関する絶対的リスク回避度を表す.
(iii) β^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測な確率変数であり $\underline{\beta} \leq \beta^i \leq \overline{\beta}$ を満たす. ここで, $0 < \underline{\beta} \leq \overline{\beta}$ とする. β^i はエージェント１の消費に関する絶対的リスク回避度を表す.
(iv) X_0^i は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathcal{F}_0^i$-可測な確率変数であり, エージェント１の初期習慣を表す.
(v) $F^i := (F_t^i)_{t \in [0,T]}$ は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測過程である. F_t^i は時刻 $t \in [0, T]$ におけるエージェント i の負債量を表す.
(vi) $\rho := (\rho_t)_{t \in [0,T]}$ は $\mathbb{R}$-値, 有界, $\mathbb{F}^0$-発展的可測過程である. ρ は市場ショックに影響される習慣トレンドを表す.
(vii) エージェント i はプライステイカーとして振る舞う.

効用最大化問題 (for エージェント i)

$$\sup_{(\pi,c)\in\mathbb{A}^i} U^i(\pi,c) \text{ s.t.}$$

$$\mathcal{W}_t^{i,(\pi,c)} = \xi^i + \int_0^t (\pi_t^\top \sigma_t \theta_s - c_s)ds + \int_0^t \pi_t^\top \sigma_t dW_s^0,\ t \in [0,T].$$

- $\pi := (\pi_t)_{t\in[0,T]}$: 各証券への投資金額. $\mathbb{R}^n$-値, $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測過程.
- $c := (c_t)_{t\in[0,T]}$: 消費過程. $\mathbb{R}$-値, $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測過程.[2]
- $p_t := \pi_t^\top \sigma_t$ と書く. $L_s := \{u^\top \sigma_s; u \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{1\times d_0}$ とおくと, 各 $s \in [0,T]$ について $p_s \in L_s$.
- 許容空間 $\mathcal{A}^i$ は, $\left\{\exp\left(-\gamma^i \mathcal{W}_\tau^{i,(p,c)} + \beta^i|c_\tau| + K^i|X_\tau^{i,c}|\right); \tau \in \mathcal{T}^{0,i}\right\}$ が一様可積分となる戦略 (p,c) の集合.

最適制御問題 (for エージェント i)

$$\sup_{(p,c)\in\mathcal{A}^i} \widetilde{U}^i(p,c) \text{ s.t. } \mathcal{W}_t^{i,(p,c)} = \xi^i + \int_0^t (p_s\theta_s - c_s)ds + \int_0^t p_s dW_s^0,\ t \in [0,T].$$

[2] 解析のしやすさのため, c は負値となることがあるが, この場合は例えば c を「純消費量」, すなわち消費 − 収入と解釈できる.

目的関数は次で与える（指数型効用関数）： $a, \delta > 0$,

$$\widetilde{U}^i(p,c) := \mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\delta T - \gamma^i(\mathcal{W}_T^{i,(p,c)} - F_T^i)\Big) \\ - a\int_0^T \exp\Big(-\delta t - \gamma^i(\mathcal{W}_t^{i,(p,c)} - F_t^i) - \beta^i(c_t - X_t^{i,c})\Big)dt\Big].$$

- γ^i ： エージェント i の資産に関する絶対的リスク回避度.
- β^i ： エージェント i の消費に関する絶対的リスク回避度.
- $W^i := (W_t^i)_{t\in[0,T]}$: d-次元 BM. エージェント i 固有のノイズを表す.
- $F^i := (F_t^i)_{t\in[0,T]}$ ： エージェント i の負債過程.
- $X^{i,c}$ ： エージェント i の消費習慣過程. $(b, \kappa > 0.)$

$$X_t^{i,c} = X_0^i + \int_0^t \{-\kappa(X_s^{i,c} - \rho_s) + b(c_s - \rho_s)\}ds, \quad t \in [0,T].$$

- $\rho := (\rho_t)_{t\in[0,T]}$ ： 市場ショックに影響される習慣トレンド.

最適制御問題の求解

本節においても，最適戦略の導出には Hu, Imkeller, & Müller (2005) の方法を用いる．ただし消費過程の存在により少し工夫が必要になる．

Definition 5.2.8 (Condition-R)

次の条件を満たす確率過程の集合 $\{(R_t^{i,(p,c)})_{t\in[0,T]}; (p,c) \in \mathcal{A}^i\}$ を見つける．

- (i) 任意の $(p,c) \in \mathcal{A}^i$ について

$$
\begin{aligned}
R_T^{1,(p,c)} &= -\exp\Big(-\delta T - \gamma^i(\mathcal{W}_T^{1,(p,c)} - F_T^i)\Big) \\
&\quad - a\int_0^T \exp\Big(-\delta t - \gamma^i(\mathcal{W}_t^{1,(p,c)} - F_t^i) - \beta^i(c_t - X_t^{1,c})\Big)dt
\end{aligned} \tag{22}
$$

  $\mathbb{P}^{0,1}$-a.s. となる．

- (ii) ある $\mathcal{F}_0^i$ -可測確率変数 R_0^i が存在し，任意の $(p,c) \in \mathcal{A}^i$ について $R_0^{i,(p,c)} = R_0^i$ a.s. となる．(つまり $R^{i,(p,c)}$ は時刻 0 において戦略に独立となる.)
- (iii) 任意の $(p,c) \in \mathcal{A}^i$ について $R^{i,(p,c)}$ は $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-supermartingale であり，ある $(p^*,c^*) \in \mathcal{A}^i$ が存在して $R^{i,(p^*,c^*)}$ が $(\mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{P}^{0,i})$-martingale となる．

最適制御問題の求解

そのような $\{(R_t^{i,(p,c)})_{t\in[0,T]};(p,c)\in\mathcal{A}^i\}$ があったとき, (p^*,c^*) が最適解となる. 実際, 任意の $(p,c)\in\mathcal{A}^i$ について

$$\widetilde{U}^i(p,c)=\mathbb{E}[R_T^{i,(p,c)}]\le\mathbb{E}[R_0^i]=\mathbb{E}[R_T^{i,(p^*,c^*)}]=\widetilde{U}^i(p^*,c^*) \tag{23}$$

$\{(R_t^{i,(p,c)})_{t\in[0,T]};(p,c)\in\mathcal{A}^i\}$ は, 次のような形をしているとアテをつける.

$$\begin{aligned}R_t^{i,(p,c)}=&-\exp\Big(-\delta t-\gamma^i(\mathcal{W}_t^{i,(p,c)}-Y_t^i-\zeta_t^i X_t^{i,c})\Big)\\&-a\int_0^t\exp\Big(-\delta s-\gamma^i(\mathcal{W}_s^{i,(p,c)}-F_s^i)-\beta^i(c_s-X_s^{i,c})\Big)ds.\end{aligned} \tag{24}$$

ただし, Y^i は戦略 p,c に依存しない確率過程で, 次の BSDE で与えられる.

$$Y_t^i=F^i+\int_t^T f^i(s,Y_s^i,Z_s^{i,0},Z_s^i)ds-\int_t^T Z_s^{i,0}dW_s^0-\int_t^T Z_s^i dW_s^i. \tag{25}$$

実際こうすると Condition-R の (i) は満たされる. また (ii) のために, $\zeta_T=0$ となる関数 ζ をうまく選ぶ必要がある. ($R_0^{i,(p,c)}$ への X^c の寄与をなくすため.)
また, (iii) を満たすようなドライバー f を見つける.

最適制御問題の求解

(iii) のためには, $R^{i,p}$ のドリフトが

- 任意の $p \in \mathcal{A}^i$ について非正
- ある $p^* \in \mathcal{A}^i$ が存在して零

となる必要がある. $R^{i,p}$ に伊藤の公式を適用して上記を満たすように f^i を選ぶと

$$
\begin{aligned}
f^i(t, Y_t, Z_t^{i,0}, Z_t^i) = &- Z_t^{i,0\|}\theta_t - \frac{|\theta_t|^2}{2\gamma^i} + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_t^{i,0\perp}|^2 + |Z_t^i|^2) - \frac{\delta}{\gamma^i} + (\kappa - b)\zeta_t^i \rho_t \\
&+ \frac{1 + b\zeta_t^i}{\beta^i}\left\{1 + \log\left(\frac{a\beta^i}{\gamma^i(1 + b\zeta_t^i)}\right) + \gamma^i(F_t^i - Y_t^i)\right\} \\
&+ X_t^{i,c}\left\{\frac{1}{\beta^i}(1 + b\zeta_t^i)(\beta^i - \gamma^i\zeta_t^i) + (\dot{\zeta}_t^i - \kappa\zeta_t^i)\right\}.
\end{aligned}
$$

となることがわかる. f^i は (p, c) に独立になるようにとる必要がある ((ii) のため) ので、

$$
\frac{1}{\beta^i}(1 + b\zeta_t^i)(\beta^i - \gamma^i\zeta_t^i) + (\dot{\zeta}_t^i - \kappa\zeta_t^i) = 0, \quad \zeta_T^i = 0
$$

が必要.

最適制御問題の求解

実は陽に解ける：

$$\zeta_t^i = \frac{e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - 1}{\delta^+ - \delta^- e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)}}, \quad t \in [0, T], \tag{26}$$

ここで

$$\delta^\pm := -A \pm \sqrt{A^2 + B}, \quad A := \frac{1}{2}\left(\kappa - b + \frac{\gamma^i}{\beta^i}\right), \quad B := \frac{\gamma^i b}{\beta^i}.$$

ζ^i は

$$0 \le \zeta_t^i \le \frac{1}{\delta^+} e^{(\delta^+ - \delta^-)T} \wedge \frac{1}{|\delta^-|},$$

を満たす．また、第４節と同様に次の二次成長型の BSDE が現れる．

$$Y_t^i = F_T^i + \int_t^T f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i. \tag{27}$$

- $f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) :=$
  $-Z_s^{i,0\|}\theta_s - \dfrac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \dfrac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) - \dfrac{\gamma^i(1 + b\zeta_s^i)}{\beta^i} Y_s^i + g_s^i.$
- $g_s^i := -\dfrac{\delta}{\gamma^i} + (\kappa - b)\zeta_s^i \rho_s + \dfrac{1 + b\zeta_s^i}{\beta^i}\left\{1 + \log\left(\dfrac{a\beta^i}{\gamma^i(1 + b\zeta_s^i)}\right) + \gamma^i F_s^i\right\}.$

Theorem 5.2.10 & Theorem 5.2.11

Assumptions 5.2.1, 5.2.4 のもと, のもと, 次で与えられる投資・消費戦略 $(p^{i,*}, c^{i,*})$ は一意な最適戦略である: $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} p_t^{i,*} &= Z_t^{i,0\parallel} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^i}, \\ c_t^{i,*} &= X_t^{i,c^{i,*}} + \frac{1}{\beta^i}\left\{\log\left(\frac{a\beta^i}{\gamma^i(1+b\zeta_t^i)}\right) - \gamma^i(Y_t^i - F_t^i + \zeta_t^i X_t^{i,c^{i,*}})\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

ただし, $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i)$ は次の BSDE の解である.

$$Y_t^i = F_T^i + \int_t^T f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i. \tag{29}$$

- $f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) :=$
  $-Z_s^{i,0\parallel}\theta_s - \dfrac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \dfrac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) - \dfrac{\gamma^i(1+b\zeta_s^i)}{\beta^i} Y_s^i + g_s^i$.
- $g_s^i := -\dfrac{\delta}{\gamma^i} + (\kappa - b)\zeta_s^i\rho_s + \dfrac{1+b\zeta_s^i}{\beta^i}\left\{1 + \log\left(\dfrac{a\beta^i}{\gamma^i(1+b\zeta_s^i)}\right) + \gamma^i F_s^i\right\}$.

実際, 上記仮定のもとで一意な解を持つ.

市場均衡モデル

Assumption 5.3.1

- $(\xi^i, \gamma^i, \beta^i, X_0^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ が i.i.d.
- 負債過程 $(F_t^i; t \in [0, T])_{i\in\{1,\dots,N\}}$ が $\mathcal{F}^0$-条件付 i.i.d.

- ξ^i ：エージェント i の初期資産.
- γ^i ：エージェント i の資産に関する絶対的リスク回避度. 有界確率変数, $\underline{\gamma} \le \gamma^i \le \overline{\gamma}$.
- β^i ：エージェント i の消費に関する絶対的リスク回避度. 有界確率変数, $\underline{\beta} \le \beta^i \le \overline{\beta}$.
- X_0^i ：エージェント i の初期習慣. 有界確率変数.
- $F^i := (F_t^i)_{t\in[0,T]}$ ：エージェント i の負債過程. 有界確率過程.

定義 4.3.（市場均衡条件）

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\pi_t^{i,*}=0, \quad dt\otimes\mathbb{P}\text{-a.e.} \tag{30}$$

ここで, $\pi_t^{i,*}$ はエージェント i の最適投資戦略である.

Chapter 4 と同様の観察から,

$$\theta_t=-\hat{\gamma}\mathbb{E}[Z_t^{1,0\parallel}|\mathcal{F}^0]^\top, \quad t\in[0,T], \quad \hat{\gamma}:=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\gamma^1}\Big]^{-1} \tag{31}$$

が, 多人数極限（$N\to\infty$）において市場均衡を達成するリスクプレミアムであると期待する. すると同様に平均場 BSDE を得る.

平均場 BSDE の性質

平均場 BSDE

$$Y_t^i = F_T^i + \int_t^T f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i, \quad t \in [0, T]. \tag{32}$$

なお,

- $f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i) = \hat{\gamma} Z_s^{i,0\|} \mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]^\top - \frac{\hat{\gamma}^2}{2\gamma^i} |\mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]|^2 + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) - \frac{\gamma^i(1 + b\zeta_s^i)}{\beta^i} Y_s^i + g_s^i$,
- $g_s^i := -\frac{\delta}{\gamma^i} + (\kappa - b)\zeta_s^i \rho_s + \frac{1 + b\zeta_s^i}{\beta^i} \left\{ 1 + \log\left(\frac{a\beta^i}{\gamma^i(1 + b\zeta_s^i)} \right) + \gamma^i F_s^i \right\}$.

本節においても縮小写像の方法 (Tevzadze (2008)) を用いることで平均場 BSDE (32) 一定の仮定のもと有界な解を持つことを示した.

Assumption 5.3.5

各 $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して, 確率変数 F_T^i と確率過程 $(g_t^i)_{t\in[0,T]}$ は

$$\sqrt{\|F_T^i\|_\infty^2 + 4\left\|\int_0^T |g_s^i| ds\right\|_\infty^2} < \frac{1}{16c_\gamma} \wedge \frac{1}{32C_\gamma}, \tag{33}$$

を満たすものとする. ただし,

$$c_\gamma := \frac{\overline{\gamma}}{2} \vee \frac{\hat{\gamma}^2}{\underline{\gamma}}, \quad C_\gamma := \hat{\gamma} + \left(\frac{\hat{\gamma}^2}{2\underline{\gamma}} \vee \frac{\overline{\gamma}}{2}\right)$$

とする.

Theorem 5.3.7

Assumptions 5.2.1, 5.3.1, 5.3.5 のもと, 平均場 BSDE (32) は有界な解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i) \in \mathbb{S}^\infty(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d_0}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d})$ を持つ.

証明のスケッチ

任意の $(z^{i,0}, z^i) \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{F}^{0,i}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{F}^{0,i})$ に対して, $(Z^{i,0}, Z^i)$ を BSDE

$$Y^i_t = F^i_T + \int_t^T f(s, Y^i_s, z^{i,0}_s, z^i_s)ds - \int_t^T Z^{i,0}_s dW^0_s - \int_t^T Z^i_s dW^i_s, \quad t \in [0, T]$$

の解として定義する. これによって定まる写像 $(z^{i,0}, z^i) \mapsto (Z^{i,0}, Z^i)$ が縮小写像となることを示す.

多人数極限（$N \to \infty$）における均衡

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $\Omega := \prod_{i=0}^{\infty} \Omega^i$, $\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}^i\right)$ の完備化 $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定められる完備確率空間とする．フィルトレーション $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ は $(\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$ の完備右連続化である．

Theorem 5.3.9

一定の仮定のもと，平均場 BSDE (32) が有界な解を持つとし，そのうちの一つ $(\mathcal{Y}^1, \mathcal{Z}^0, \mathcal{Z}^1)$ を任意に選んで固定する．このとき，$\theta_t^{\mathrm{mfg}} := -\hat{\gamma}\mathbb{E}[\mathcal{Z}_t^{0\|}|\mathcal{F}^0]^\top$ $(t \in [0, T])$ で定義される過程 θ^{mfg} は次の意味で多人数極限において市場均衡をもたらす:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi_t^{i,*}\right|^2 dt = 0. \tag{34}$$

ここで，$(\pi_t^{i,*}; t \in [0, T])_{i\in\mathbb{N}}$ はエージェントたちの最適投資戦略である．

EQG モデル

均衡リスクプレミアムの存在や、それを特徴付ける方程式、その方程式の性質はある程度わかった。

問題点

しかし、下記の様な問題点がある。

- 負債 $\|F\|_\infty$ などが一定以上小さいという仮定は強すぎる。
- 平均場 BSDE のままでは数値計算による解析が困難である。

別のアプローチで平均場 BSDE を分析できないか？

$\rightarrow$ Exponential Quadratic Gaussian (EQG) モデルを考える！

EQG モデル

EQG モデルの考え方

- 負債過程 F が Gaussian process (x^0, x^1) の二次形式で与えられると仮定する．$(t \in [0, T],)$

$$
\begin{aligned}
F_t :=& \frac{1}{2}\langle A^F_{00}(t)x^0_t, x^0_t\rangle + \frac{1}{2}\langle A^F_{11}(t)x^1_t, x^1_t\rangle + \langle A^F_{10}(t)x^0_t, x^1_t\rangle \\
&+ \langle B^F_0(t), x^0_t\rangle + \langle B^F_1(t), x^1_t\rangle + C^F(t)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

- 平均場 BSDE の解 Y も (x^0, x^1) の二次形式になるものがあると「アテ」をつける。

$$
\begin{aligned}
Y_t =& \frac{1}{2}\langle A_{00}(t)x^0_t, x^0_t\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}(t)x^1_t, x^1_t\rangle + \langle A_{10}(t)x^0_t, x^1_t\rangle \\
&+ \langle B_0(t), x^0_t\rangle + \langle B_1(t), x^1_t\rangle + C(t).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

- 係数関数が満たすべき常微分方程式を導出する。

アイデア自体は Linear quadratic control などで出てくる方法に似ている．

EQG モデル

市場には可算無限人のエージェントがいると仮定する．絶対的リスク回避度 $(\gamma^i, \beta^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は全エージェントに共通であるとし，その共通の値を $(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ で表すことにする．
確率空間の定義を一部変更する．$(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)$ $(i \in \mathbb{N})$ は完備確率空間であり，d-次元標準 Brown 運動 $W^i := (W^i_t)_{t \in [0,T]}$ と σ-加法族 $\sigma(\xi^i, X^i_0, x^i_0)$ によって生成された完備右連続フィルトレーション $\mathbb{F}^i := (\mathcal{F}^i_t)_{t \in [0,T]}$ が定義される．特に，$\mathcal{F}^i_0$ は $\sigma(\xi^i, X^i_0, x^i_0)$ の完備化であり，また $\mathcal{F}^i := \mathcal{F}^i_T$ とする．ここで，(ξ^i, X^i_0) は $\mathbb{R}$-値確率変数であり，x^i_0 は $\mathbb{R}^d$-値確率変数である．

EQG モデル

EQG モデルのため、市場の設定を少し変更する.

Assumption 5.4.1

(i) 無リスク金利は零とする.
(ii) 市場には $n \in \mathbb{N}$ 個の無配当証券が存在し, 価格過程は

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)(\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T], \tag{37}$$

で与えられる. ここで, $S_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\mu := (\mu_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^0, \mathbb{F}^0, \mathbb{R}^n)$ そして $\sigma := (\sigma_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{P}^0, \mathbb{F}^0, \mathbb{R}^{n\times d_0})$ とする. また, $n \le d_0$ とする.
(iii) $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ は各 $t \in [0, T]$ について $\sigma_t = (\hat{\sigma}_t, \check{\sigma}_t)$ と書ける. ただし, $(\hat{\sigma}_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{P}^0, \mathbb{F}^0, \mathbb{R}^{n\times n})$ は $\hat{\sigma}_t$ が全ての $t \in [0, T]$ について常に正則行列であるような過程であり, $(\check{\sigma}_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{P}^0, \mathbb{F}^0, \mathbb{R}^{n\times(d_0-n)})$ である. さらに, $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ は $\underline{\lambda} I_n \le \sigma_t\sigma_t^\top \le \overline{\lambda} I_n$, $dt \otimes \mathbb{P}^0$-a.e. を $0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ と n 次単位行列 I_n に対して満たしている.
(iv) リスクプレミアム過程 $\theta \in \mathbb{L}^0(\mathbb{F}^0, \mathbb{R}^{d_0})$ は $\theta_t = \sigma_t^\top(\sigma_t\sigma_t^\top)^{-1}\mu_t$ $(t \in [0, T])$ により定義され, また, Doléans-Dade exponential $\left\{\mathcal{E}\left(-\int_0^\cdot \theta_s^\top dW_s^0\right)_t ; t \in [0, T]\right\}$ はクラス $\mathcal{D}$ マルチンゲールである.

EQG モデル

Assumption 5.4.3

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ について, ξ^i と X_0^i は $\mathbb{R}$-値, $\mathcal{F}_0^i$-可測, かつ正規分布する確率変数であり, それぞれエージェント i の初期資産と初期習慣を表す. x_0^i は $\mathbb{R}^d$-値, $\mathcal{F}_0^i$-可測, かつ正規分布する確率変数である.

(ii) 各 $i \in \mathbb{N}$ において, 確率変数 ξ^i, X_0^i 及び x_0^i は相互に独立である. また $(\xi^i, X_0^i, x_0^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は同分布している.

(iii) $(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ は, それぞれエージェントの資産及び消費に関する絶対的リスク回避度であり, 特に全エージエントに共通の値である.

(iv) 習慣トレンド $\rho : [0, T] \to \mathbb{R}$ は時間に関して連続な関数である.

EQG モデル

Assumption 5.4.3 (続き)

(v) 各 $i \in \mathbb{N}$ について, 負債過程 $(F_t^i; t \in [0,T])_{i \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$-値, $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測であり, 以下の 2 次形式で与えられる:

$$\begin{aligned} F_t^i := &\frac{1}{2}\langle A_{00}^F(t)x_t^0, x_t^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}^F(t)x_t^i, x_t^i\rangle + \langle A_{10}^F(t)x_t^0, x_t^i\rangle \\ &+ \langle B_0^F(t), x_t^0\rangle + \langle B_1^F(t), x_t^i\rangle + C^F(t), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{38}$$

ここで, $(A_{00}^F, A_{11}^F, A_{10}^F, B_0^F, B_1^F, C^F) \in \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{M}_{d_0}) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{M}_d) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^{d \times d_0}) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^{d_0}) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R})$ とする. また各 $i \in \mathbb{N}$ に対して, ファクター過程 $(x^0, x^i) \in \mathbb{L}^0(\mathbb{F}^0, \mathbb{R}^{d_0}) \times \mathbb{L}^0(\mathbb{F}^i, \mathbb{R}^d)$ は $t \in [0,T]$,

$$x_t^0 = x_0^0 - \int_0^t K_0(x_s^0 - m_0)ds + \Sigma_0 W_t^0, \quad x_t^i = x_0^i - \int_0^t K(x_s^i - m)ds + \Sigma W_t^i$$

で定める. ただし, それぞれ $x_0^0 \in \mathbb{R}^{d_0}$, $(K_0, K) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, $(m_0, m) \in \mathbb{R}^{d_0} \times \mathbb{R}^d$, and $(\Sigma_0, \Sigma) \in \mathbb{R}^{d_0 \times d_0} \times \mathbb{R}^{d \times d}$ である.

(vi) 各エージェントはプライステイカーである.

EQG モデル

絶対的リスク回避度 $(\gamma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ は全エージェントに共通 (γ で表される.) なので, 平均場 BSDE は

$$Y_t^i = F_T^i + \int_t^T f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i, \quad t \in [0, T], \tag{39}$$

ただし,

$$f^i(s, Y_s^i, Z_s^{i,0}, Z_s^i)$$
$$= \gamma Z_s^{i,0\|}\mathbb{E}[Z_s^{i,0\|}|\mathcal{F}^0]^\top - \frac{\gamma}{2}|\mathbb{E}[Z_s^{i,0\|}|\mathcal{F}^0]|^2 + \frac{\gamma}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) - \frac{\gamma(1+b\zeta_s)}{\beta}Y_s^i + g_s^i.$$

となる。なお、簡単のため以下の議論では $i = 1$ とし、適宜添え字は省略している。

EQG モデル

平均場 BSDE

$$dY_t = -f^i(t, Y_t, Z_t^0, Z_t^1)dt + Z_t^0 dW_t^0 + Z_t^1 dW_t^1, \quad t \in [0, T]. \tag{40}$$

このとき, 次のような形をしている解があると「アテ」をつける:

$$\begin{aligned} Y_t = &\frac{1}{2}\langle A_{00}(t)x_t^0, x_t^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}(t)x_t^1, x_t^1\rangle + \langle A_{10}(t)x_t^0, x_t^1\rangle \\ &+ \langle B_0(t), x_t^0\rangle + \langle B_1(t), x_t^1\rangle + C(t). \end{aligned} \tag{41}$$

ただし, $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C)$ はそれぞれ連続微分可能な $[0, T]$ 上の関数.

EQG モデル

伊藤の公式を適用

$$dY_t = \boxed{(x\text{の二次式})}\, dt + \underbrace{(x\text{の一次式})}_{Z^0\text{に対応}} dW_t^0 + \underbrace{(x\text{の一次式})}_{Z^1\text{に対応}} dW_t^1$$

平均場BSDE

$$dY_t = \underbrace{(Z^0\text{と}Z^1\text{の二次式})}_{\boxed{x\text{の二次式}}}\, dt + Z_t^0 dW_t^0 + Z_t^1 dW_t^1$$

目標は, $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C)$ が満たすべき ODE を見つけること.

EQG モデル

BSDE 終端条件 $Y_T = F_T$ から, $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C)$ が

$$A_{00}(T) = A_{00}^F(T), \quad A_{11}(T) = A_{11}^F(T), \quad A_{10}(T) = A_{10}^F(T),$$
$$B_0(T) = B_0^F(T), \quad B_1(T) = B_1^F(T), \quad C(T) = C^F(T).$$

を満たす必要がある.

EQG モデル

Y に伊藤の公式を適用すると,

$$
\begin{aligned}
dY_t = \Big\{ & \Big\langle \Big(\frac{1}{2}\dot{A}_{00}(t) - K_0 A_{00}(t) \Big) x_t^0, x_t^0 \Big\rangle + \Big\langle \Big(\frac{1}{2}\dot{A}_{11}(t) - K A_{11}(t) \Big) x_t^1, x_t^1 \Big\rangle \\
& + \Big\langle \Big(\dot{A}_{10}(t) - (K_0 + K) A_{10}(t) \Big) x_t^0, x_t^1 \Big\rangle \\
& + \langle \dot{B}_0(t) - K_0 B_0(t) + K_0 A_{00}(t) m_0 + K A_{10}(t)^\top m, x_t^0 \rangle \\
& + \langle \dot{B}_1(t) - K B_1(t) + K A_{11}(t) m + K_0 A_{10}(t) m_0, x_t^1 \rangle \\
& + \dot{C}(t) + \langle K_0 B_0(t), m_0 \rangle + \langle K B_1(t), m \rangle \\
& + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{00}(t)\Sigma_0 \Sigma_0^\top] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top] \Big\} dt \\
& + \langle \Sigma_0^\top (A_{00}(t) x_t^0 + A_{10}(t)^\top x_t^1 + B_0(t)), dW_t^0 \rangle \\
& + \langle \Sigma^\top (A_{10}(t) x_t^0 + A_{11}(t) x_t^1 + B_1(t)), dW_t^1 \rangle .
\end{aligned}
\tag{42}
$$

EQG モデル

平均場 BSDE と比べると, Z^0 と Z^1 は

$$\begin{aligned} Z_t^0 &:= \left\{ \Sigma_0^\top (A_{00}(t) x_t^0 + A_{10}(t)^\top x_t^1 + B_0(t)) \right\}^\top, \\ Z_t^1 &:= \left\{ \Sigma^\top (A_{10}(t) x_t^0 + A_{11}(t) x_t^1 + B_1(t)) \right\}^\top \end{aligned} \tag{43}$$

となる. これをもとに BSDE のドライバー

$$\gamma Z_s^{i,0\|} \mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]^\top - \frac{\gamma}{2} |\mathbb{E}[Z_s^{i,0\|} | \mathcal{F}^0]|^2 + \frac{\gamma}{2} (|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) - \frac{\gamma(1 + b\zeta_s)}{\beta} Y_s^i + g_s^i$$

を計算してみる.

EQG モデル

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\gamma}{2}\left|\mathbb{E}[Z_t^{0\|}|\mathcal{F}^0]-Z_t^{0\|}\right|^2+\frac{\gamma}{2}(|Z_t^0|^2+|Z_t^1|^2)-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}(Y_t-F_t)+\widetilde{g}_t\\
&=\left\langle\left\{\frac{\gamma}{2}\Big(A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t)+A_{10}(t)^\top\Sigma\Sigma^\top A_{10}(t)\Big)-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{2\beta}(A_{00}(t)-A_{00}^F(t))\right\}x_t^0,x_t^0\right\rangle\\
&+\left\langle\left\{\frac{\gamma}{2}(A_{10}(t)\check{\Sigma}_0\check{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top+A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{11}(t))-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{2\beta}(A_{11}(t)-A_{11}^F(t))\right\}x_t^1,x_t^1\right\rangle\\
&+\left\langle\left\{\gamma(A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t)+A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{10}(t))-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}(A_{10}(t)-A_{10}^F(t))\right\}x_t^0,x_t^1\right\rangle\\
&+\left\langle\gamma(A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top B_0(t)+A_{10}(t)^\top\Sigma\Sigma^\top B_1(t))-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}(B_0(t)-B_0^F(t)),x_t^0\right\rangle\\
&+\Big\langle\gamma(A_{10}(t)\hat{\Sigma}_0\hat{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top\mu_t^1+A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top B_0(t)+A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top B_1(t))\\
&-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}(B_1(t)-B_1^F(t)),x_t^1\Big\rangle\\
&-\frac{\gamma}{2}\langle A_{10}(t)\hat{\Sigma}_0\hat{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top\mu_t^1,\mu_t^1\rangle+\frac{\gamma}{2}\langle\Sigma_0^\top B_0(t),\Sigma_0^\top B_0(t)\rangle+\frac{\gamma}{2}\langle\Sigma^\top B_1(t),\Sigma^\top B_1(t)\rangle\\
&-\frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}(C(t)-C^F(t))+\widetilde{g}_t,
\end{aligned}
$$

EQG モデル

この結果を, Y に伊藤の公式を適用した時のドリフト項と比べると,
$(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C)$ が満たすべき ODE が出てくる.

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_{00}(t) =& -\gamma A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t) - \gamma A_{10}(t)^\top \Sigma\Sigma^\top A_{10}(t) \\
&+ \left(2K_0 + \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}\right) A_{00}(t) - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} A_{00}^F(t), \\
\dot{A}_{11}(t) =& -\gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{11}(t) - \gamma A_{10}(t)\check{\Sigma}_0\check{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top \\
&+ \left(2K + \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}\right) A_{11}(t) - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} A_{11}^F(t), \\
\dot{A}_{10}(t) =& -\gamma A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t) - \gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{10}(t) \\
&+ \left((K_0 + K) + \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta}\right) A_{10}(t) - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} A_{10}^F(t),
\end{aligned}
\tag{44}
$$

EQG モデル

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_0(t) =& \Big(-\gamma A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top + \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} + K_0\Big) B_0(t) - \gamma A_{10}(t)^\top \Sigma\Sigma^\top B_1(t) \\
& - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} B_0^F(t) - K_0 A_{00}(t) m_0 - K A_{10}(t)^\top m, \\
\dot{B}_1(t) =& \Big(-\gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top + \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} + K\Big) B_1(t) \\
& - \gamma\Big(A_{10}(t)\hat{\Sigma}_0\hat{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top \mu_t^1 + A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top B_0(t)\Big) \\
& - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} B_1^F(t) - K A_{11}(t) m - K_0 A_{10}(t) m_0, \\
\dot{C}(t) =& \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} C(t) - \frac{\gamma(1+b\zeta_t)}{\beta} C^F(t) - \frac{\gamma}{2}\langle \Sigma_0^\top B_0(t), \Sigma_0^\top B_0(t)\rangle \\
& - \frac{\gamma}{2}\langle \Sigma^\top B_1(t), \Sigma^\top B_1(t)\rangle - \langle K_0 B_0(t), m_0\rangle - \langle K B_1(t), m\rangle \\
& + \frac{\gamma}{2}\langle A_{10}(t)\hat{\Sigma}_0\hat{\Sigma}_0^\top A_{10}(t)^\top \mu_t^1, \mu_t^1\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top] - \widetilde{g}_t,
\end{aligned} \tag{45}
$$

EQG モデル

これらの観察から次が言える.

Theorem 5.4.7

Assumptions 5.4.1, 5.4.3 を満たすものとする. さらに, 上記の常微分方程式が大域的な解 $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C) \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$ を持つとする. このとき, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して, 以下で定義される確率過程 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i) \in \mathbb{S}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d_0}) \times \mathbb{S}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^{1\times d})$ は平均場 BSDE (39) の解となる: $t \in [0,T]$ について

$$
\begin{aligned}
Y_t^i =& \frac{1}{2}\langle A_{00}(t)x_t^0, x_t^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}(t)x_t^i, x_t^i\rangle + \langle A_{10}(t)x_t^0, x_t^i\rangle \\
&+ \langle B_0(t), x_t^0\rangle + \langle B_1(t), x_t^i\rangle + C(t), \\
Z_t^{i,0} =& \left\{\Sigma_0^\top \left(A_{00}(t)x_t^0 + A_{10}(t)^\top x_t^i + B_0(t)\right)\right\}^\top, \\
Z_t^i =& \left\{\Sigma^\top \left(A_{10}(t)x_t^0 + A_{11}(t)x_t^i + B_1(t)\right)\right\}^\top.
\end{aligned} \tag{46}
$$

この解を用いて, 均衡モデルの分析を行う.

EQG モデル

本枠組みにおいても，市場均衡を達成するリスクプレミアム過程は

$$\vartheta_t := -\gamma \mathbb{E}[Z_t^{1,0\|} | \mathcal{F}^0]^\top, \quad t \in [0, T] \tag{47}$$

と表せると期待できる．しかしながら，Theorem 5.4.7 により，

$$\begin{aligned}\vartheta_t = & -\gamma \hat{\Sigma}_0^\top \left(A_{00}(t) \mathbb{E}[x_t^0] + A_{10}(t)^\top \mu_t^1 + B_0(t) \right) \\ & -\gamma \hat{\Sigma}_0^\top A_{00}(t) \Sigma_0 \int_0^t e^{-K_0(t-s)} dW_s^0\end{aligned}$$

となり，$\vartheta \notin \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ である．Y^i 及び F^i は ファクター過程 x^0, x^i の 2 次形式であるから $R^{(p,c)}$ の可積分性を保証するために追加的な仮定を設ける必要がある．具体的には，$|\mathrm{Var}(x_0^i)|$, $|\Sigma_0|$ 及び $|\Sigma|$ のサイズを制限する．ここで，$\mathrm{Var}(x_0^i)$ は x_0^i の共分散行列である．

EQG モデル

まずは EQG モデルにおける最適投資・消費戦略について分析する．今までと同様に, 確率過程 $R^{i,(p,c)}$ を定義する:

$$R_t^{i,(p,c)} := -\exp\Big(-\delta t - \gamma(\mathcal{W}_t^{i,(p,c)} - y_t^i - \zeta_t X_t^{i,c})\Big) - a\int_0^t \exp\Big(-\delta s - \gamma(\mathcal{W}_s^{i,(p,c)} - F_s^i) - \beta(c_s - X_s^{i,c})\Big) ds, \quad t \in [0,T]$$

許容空間を次で定義する．

Definition 5.4.5

各 $i \in \mathbb{N}$ について, 許容空間 $\mathbb{A}^i_{\mathrm{EQG}}$ とは, 効用関数について $U^i(\pi, c) > -\infty$ を満たし, かつ $\{R_\tau^{i,(p,c)}; \tau \in \mathcal{T}^{0,i}\}$ が一様可積分となる $\mathbb{F}^{0,i}$-発展的可測過程 $(\pi, c) \in \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{F}^{0,i}, \mathbb{R})$ からなる集合である．

このとき, 次の結果が言える．

EQG モデル

Theorem 5.4.10

Assumptions 5.4.1, 5.4.3 を満たすとする．さらに，前述の常微分方程式が大域的な解 $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C) \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$ を持つとする．このとき，ある定数 $\varsigma > 0$ が存在して，
$|\Sigma_0|^2 \vee |\Sigma|^2 \vee |\mathrm{Var}(x_0^1)| < \varsigma$ を満たすとき，各 $i \in \mathbb{N}$ について，下記で定義される投資・消費戦略 $(p^{i,*}, c^{i,*})$ は $\mathcal{A}^i_{\mathrm{EQG}}(\vartheta)$ に属し，かつ，エージェント i の最適投資・消費戦略である．$t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} p_t^{i,*} &:= (\pi_t^{i,*})^\top \sigma_t := Z_t^{i,0\|} + \frac{\vartheta_t^\top}{\gamma}, \quad t \in [0,T], \\ c_t^{i,*} &= X_t^{i,c^{i,*}} + \frac{1}{\beta}\left\{\log\left(\frac{a\beta}{\gamma(1+b\zeta_t)}\right) - \gamma(Y_t^i - F_t^i + \zeta_t X_t^{i,c^{i,*}})\right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

また，多人数極限における均衡も次の通り示せる．

EQG モデル

Theorem 5.4.13

Assumptions 5.4.1, 5.4.3 を満たすとする．さらに，前述の常微分方程式が大域的な解 $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C) \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{M}_d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$ を持つとする．また，Theorem 5.4.10 の定数 $\varsigma > 0$ に対して

$$|\Sigma_0|^2 \vee |\Sigma|^2 \vee |\mathrm{Var}(x_0^1)| < \varsigma$$

を満たすとする. このとき, 各エージェントが最適戦略として (48) を採用しているならば, (47) で定義される確率過程 ϑ は多人数極限において市場均衡を達成するリスクプレミアム過程である．すなわち，エージェントの最適投資戦略 $(\pi_t^{i,*}; t \in [0,T])_{i\in\mathbb{N}}$ について

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \pi_t^{i,*}\right|^2 dt = 0 \tag{49}$$

が成立する.

モデル設定の拡張

本論文では Section 5.5 において 3 つの拡張を紹介している．概要は下記の通り

- 非負消費モデル
  - 今までのモデルでは消費過程 c は $\mathbb{R}$-値としており，特に負値の場合は収入と解釈することにしていた．
  - この拡張では c が $\mathbb{R}_+$-値となる場合のモデルについて考えた．
  - この設定においてもこれまでと同様の手法で均衡解の存在が示せる．
- 絶対的リスク回避度の一般化
  - 今までのモデルでは，効用関数における純資産に対する絶対的リスク回避度は，終端効用と期間効用とにともに同じパラメータ γ^i を仮定していた．
  - この拡張では終端効用における絶対的リスク回避度が γ^i，期間効用におけるそれが η^i となる一般化を行った．
  - この設定においても追加的仮定のもとで，これまでと同様の議論が適用できる．

モデル設定の拡張

- 習慣トレンドへの追加的仮定
  - 今までのモデルでは, 習慣過程 X^c における習慣トレンド ρ は外生的に与えていた.
  - この拡張では $\rho_t = \mathbb{E}[c^{1,*}|\mathcal{F}^0]$ を仮定し, エージェントが消費を通しても相互作用用モデルを提案する.
  - 本拡張は均衡を特徴付ける式として平均場型 FBSDE が登場する. ただしその可解性の分析は深掘りせず, 紹介に留めている.

Chapter 5 のまとめ

- Hu, Imkeller, & Müller (2005) の手法を応用して消費・習慣形成付き指数効用最大化問題を求解した.
- 多人数極限を取るアイデアから平均場 BSDE を導出し, 解の存在について示した. 平均場 BSDE の解によって表されるリスクプレミアム過程が多人数極限において市場均衡を達成することを示した
- EQG モデルを新たに導入し、平均場 BSDE の半解析解の提示をした.

Chapter 6. Mean Field Equilibrium Asset Pricing Model Under Partial Observation

※本節は

- M. Sekine, 2025, Mean field equilibrium asset pricing model under partial observation: an exponential quadratic Gaussian approach, JJIAM.

の内容に基づく.

本節の主な内容

部分観測下の金融市場における均衡モデルを構築する.

Section 6.2：最適投資問題

部分観測市場をモデリングし, そこでのエージェントの最適投資戦略を導出する.

Section 6.3：市場均衡モデル

市場の需給均衡を特徴付ける方程式 (BSDE) を EQG モデルの枠組みで解析する. さらに, 線形フィルタリング理論を用いて市場均衡を達成するリスクプレミアム過程 θ を内生的に導出する.

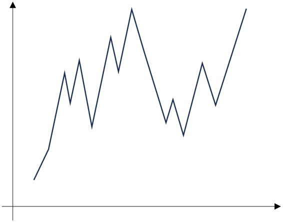
Section 6.4：数値シミュレーション

簡単な数値計算を通して均衡モデルの可視化を試みる.

部分観測市場の設定

- 証券価格や値動きは, 投資家がアクセスできる情報である.
- しかし, リスクプレミアムや外生的ショックに分けてそれらを識別することはできない.

株価



値動きの原因

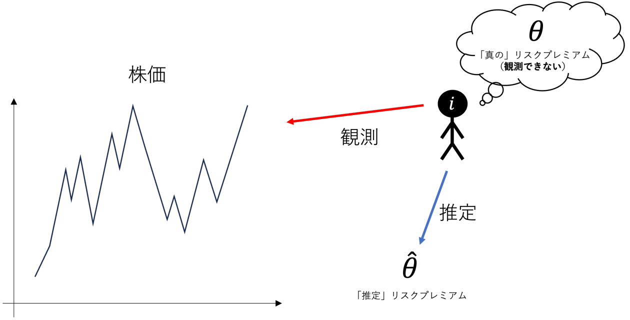
・市場全体のノイズ
・リスクプレミアムの変化
など

投資家はこれらの要因を個別に識別できない。

株価からリスクプレミアムを推定して投資戦略を決定する。

部分観測市場の設定

- したがって, 投資家たちは証券価格からリスクプレミアムを推定しなければならない.
- その「推定された」リスクプレミアム $\widehat{\theta}$ を元に投資戦略を決める.



本研究では, 市場均衡をもたらすような「真の」リスクプレミアム θ を導出したい.

確率空間

$i \in \mathbb{N}$ について

1. $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}^0_t)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 Brown 運動 $W^0 := (W^0_t)$, k-次元 Brown 運動 $B^0 := (B_t)$, $\mathbb{R}^{d_0}$-値確率変数 μ_0 から生成される完備右連続フィルトレーション. W^0 と B^0 は独立. $\mathcal{F}^0 := \mathcal{F}^0_T$. $\mathcal{F}^0_0$ は $\sigma(\mu_0)$ の完備化.
2. $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)$: 完備確率空間. $\mathbb{F}^i := (\mathcal{F}^i_t)_{t\in[0,T]}$: d-次元 Brown 運動 $W^i := (W^i_t)$ と σ-加法族 $\sigma(\xi^i, x^i_0)$ により生成される完備右連続フィルトレーション ($\mathcal{F}^i_0$ は $\sigma(\xi^i, x^i_0)$ の完備化.). $\mathcal{F}^i := \mathcal{F}^i_T$. x^i_0 は $\mathbb{R}^d$-値, ξ^i は $\mathbb{R}$-値確率変数.
3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $\Omega := \prod_{i=0}^\infty \Omega^i$, $\left(\bigotimes_{i=0}^\infty \mathcal{F}^i, \bigotimes_{i=0}^\infty \mathbb{P}^i\right)$ の完備化 $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定められる完備確率空間とする. フィルトレーション $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ は $(\bigotimes_{i=0}^\infty \mathcal{F}^i_t)_{t\in[0,T]}$ の完備右連続化である.

エージェントの最適投資問題

Assumption 6.2.1 (市場の設定)

(i) 無リスク金利は零とする.
(ii) $d_0 \in \mathbb{N}$ 個の無配当証券. 価格過程は

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)(\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]. \tag{50}$$

- $S_0 \in \mathbb{R}_{++}^{d_0}$: 初期価格
- $W^0 := (W_t^0)_{t\in[0,T]}$: d_0-次元 BM. コモンノイズ.
- $\mu := (\mu_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^2$: $\mathbb{R}^{d_0}$-値, $\mathbb{F}^0$-発展的可測.
- $\sigma := (\sigma_t)_{t\in[0,T]}$: $\mathbb{R}^{d_0\times d_0}$-値, non-random, 正則行列.
- $\underline{\lambda} I_n \leq \sigma_t\sigma_t^\top \leq \overline{\lambda} I_n$ を満たす. $(0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda} < \infty)$
- リスクプレミアム過程 $\theta_t := \sigma_t^{-1}\mu_t$, ($t \in [0, T]$.) Doléans-Dade exponential $\left\{\mathcal{E}\left(-\int_0^\cdot \theta_s^\top dW_s^0\right)_t ; t \in [0, T]\right\}$ はクラス $\mathcal{D}$ マルチンゲールである.

Definition 6.2.3 (投資家のフィルトレーション)

$\mathbb{G}^0 := (\mathcal{G}_t^0)_{t\in[0,T]}$ を証券価格 S により生成される完備右連続フィルトレーションと定義する.

「推定された」リスクプレミアム過程を $\widehat{\theta}_t := \mathbb{E}[\theta_t | \mathcal{G}_t^0](t \in [0,T])$ とおく. また確率過程 $\widehat{W}^0$ を

$$\widehat{W}_t^0 := W_t^0 + \int_0^t (\theta_s - \widehat{\theta}_s) ds, \quad t \in [0,T], \tag{51}$$

で定める. [3] すると S のダイナミクスは

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)\sigma_r(\widehat{\theta}_r dr + d\widehat{W}_r^0), \quad t \in [0,T]. \tag{52}$$

と書ける.

[3] Lévy の定理より $\widehat{W}^0$ は $(\mathbb{G}^0, \mathbb{P}^0)$-Brown 運動であることがわかる. (Lemma 6.2.6.) この過程はフィルタリング理論で "innovation process" と呼ばれている.

エージェントの最適投資問題

市場には投資家（エージェント）が可算無限人いるとする．σ-加法族 $\mathcal{G}$ を $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}^i \otimes \mathcal{G}^0$ の完備化で定める．フィルトレーション $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \in [0,T]}$ は $(\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_t^i \otimes \mathcal{G}_t^0)_{t \in [0,T]}$ の完備右連続化である．

Assumption 6.2.8 (エージェントの性質)

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ について, ξ^i は $\mathbb{R}$-値, $\mathcal{F}_0^i$-可測な正規分布に従う確率変数でありエージェント-i の初期資産を表す．x_0^i は $\mathbb{R}^d$-値, $\mathcal{F}_0^i$-可測な正規分布に従う確率変数とする．

(ii) 確率変数 ξ^i と x_0^i は独立であり, $(\xi^i, x_0^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は同分布である．

エージェントの最適投資問題

市場には投資家（エージェント）が可算無限人いるとする.

Assumption 6.2.8 続き (エージェントの性質)

(iii) 各 $i \in \mathbb{N}$ について, $(F^i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$-値 $\mathcal{G}_T^{0,i}$-可測な確率変数であり, エージェント-i の時刻 T における負債残高を表す. 各 F^i は二次形式

$$F^i := \frac{1}{2}\langle A_{00}^F x_T^0, x_T^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}^F x_T^i, x_T^i\rangle + \langle A_{10}^F x_T^0, x_T^i\rangle + \langle B_0^F, x_T^0\rangle + \langle B_1^F, x_T^i\rangle + C^F, \tag{53}$$

で与えられる. ここで
$(A_{00}^F, A_{11}^F, A_{10}^F, B_0^F, B_1^F, C^F) \in \mathbb{M}_{d_0} \times \mathbb{M}_d \times \mathbb{R}^{d\times d_0} \times \mathbb{R}^{d_0} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ であり, ファクター過程 $(x^0, x^i) \in \mathbb{L}^0(\mathbb{G}^0, \mathbb{R}^{d_0}) \times \mathbb{L}^0(\mathbb{F}^i, \mathbb{R}^d)$ は

$$x_t^0 = x_0^0 - \int_0^t K_0(x_s^0 - m_0)ds + \Sigma_0 \widehat{W}_t^0, \quad x_t^i = x_0^i - \int_0^t K(x_s^i - m)ds + \Sigma W_t^i$$

で定められる ($t \in [0, T]$). なお, $x_0^0 \in \mathbb{R}^{d_0}$, $(K_0, K) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, $(m_0, m) \in \mathbb{R}^{d_0} \times \mathbb{R}^d$, 及び $(\Sigma_0, \Sigma) \in \mathbb{R}^{d_0\times d_0} \times \mathbb{R}^{d\times d}$ とする.
(iv) 各エージェントはプライステイカーである.

効用最大化問題 (for エージェント i)

$$\sup_{p\in\mathcal{A}^i} \mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma(\mathcal{W}_T^{i,p} - F^i)\Big)\Big]$$

subject to

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_t^{i,\pi} &:= \xi^i + \int_0^t \pi_r^\top \mathrm{diag}(S_r)^{-1} dS_r \\ &= \xi^i + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s \widehat{\theta}_s ds + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s d\widehat{W}_s^0\end{aligned} \tag{54}$$

- $\pi := (\pi_t)_{t\in[0,T]}$: 各証券への投資金額.
- $p_t := \pi_t^\top \sigma_t$ と書く. $L_s := \{u^\top \sigma_s; u \in \mathbb{R}^{d_0}\} \subset \mathbb{R}^{1\times d_0}$ とおくと, 各 $s \in [0, T]$ について $p_s \in L_s$.
- ξ^i : エージェント i の初期資産.
- γ : 正定数. エージェントの資産に関する絶対的リスク回避度.
- $W^i := (W_t^i)_{t\in[0,T]}$: d-次元 BM. エージェント i 固有のノイズを表す.
- F^i : エージェント i の終端時間における負債.

効用最大化問題を解くため, 次の BSDE を考える. 各 $i \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ について,

$$
\begin{aligned}
Y_t^i =& F^i + \int_t^T \left(-Z_s^{i,0} \widehat{\theta}_s - \frac{|\widehat{\theta}_s|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2} |Z_s^i|^2 \right) ds \\
& - \int_t^T Z_s^{i,0} d\widehat{W}_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i.
\end{aligned} \tag{55}
$$

この BSDE が解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i)$ を持つとき, 確率過程 $R^{i,p} \in \mathbb{L}^0(\mathbb{G}^{0,i}, \mathbb{R})$ を以下で定める.

$$
R_t^{i,p} := -\exp\Big(-\gamma(\mathcal{W}_t^{i,p} - Y_t^i) \Big), \quad t \in [0, T], \quad i \in \mathbb{N}. \tag{56}
$$

Definition 6.2.10

許容空間 $\mathbb{A}^i$ は族 $\{R_\tau^{i,p}; \tau \in \mathcal{T}(\mathbb{G}^{0,i})\}$ が一様可積分となる取引戦略 $\pi \in \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^{0,i}, \mathbb{G}^{0,i}, \mathbb{R}^{d_0})$ の集合とする. $\mathcal{A}^i := \{p = \pi^\top \sigma; \pi \in \mathbb{A}^i\}$ とおく.

Theorem 6.2.12

Assumptions 6.2.1, 6.2.8 に加え, BSDE:

$$Y_t^i = F^i + \int_t^T \left(-Z_s^{i,0}\widehat{\theta}_s - \frac{|\widehat{\theta}_s|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2}|Z_s^i|^2 \right) ds - \int_t^T Z_s^{i,0} d\widehat{W}_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i \tag{57}$$

が解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i)$ を持つとする. また, 以下で定められる確率過程 $p^{i,*} := (p_t^{i,*})_{t\in[0,T]}$ が 許容空間 $\mathcal{A}^i$ に属するとする.

$$p_t^{i,*} := Z_t^{i,0} + \frac{\widehat{\theta}_t^\top}{\gamma}, \quad t \in [0, T]$$

このとき $p^{i,*}$ はエージェント-i の最適投資戦略である.

Definition 6.3.1（Asymptotic market clearing condition）

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\pi_t^{i,*}=0,\quad dt\otimes\mathbb{P}\text{-a.e.} \tag{58}$$

ここで, $\pi_t^{i,*}$ はエージェント i の最適投資戦略である.

今までと同様に,

$$\widehat{\theta}_t=-\gamma\mathbb{E}[Z_t^{1,0}|\mathcal{G}^0]^\top,\quad t\in[0,T] \tag{59}$$

が, 多人数極限（$N\to\infty$）において市場均衡を達成するリスクプレミアムであると期待する.

(59) を BSDE (57) に代入してみると…

平均場 BSDE の性質

平均場 BSDE

$$
\begin{aligned}
Y_t^i =& F^i + \int_t^T \left(\gamma Z_s^{i,0} \mathbb{E}[Z_s^{i,0} | \mathcal{G}^0]^\top - \frac{\gamma}{2} |\mathbb{E}[Z_s^{i,0} | \mathcal{G}^0]|^2 + \frac{\gamma}{2} |Z_s^i|^2 \right) ds \\
&- \int_t^T Z_s^{i,0} d\widehat{W}_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Chapter 5 と同様に, EQG モデルの枠組みで平均場 BSDE (60) の解を分析する.

次の形をした解があるとしてみる.

$$Y_t^i := \frac{1}{2}\langle A_{00}(t)x_t^0, x_t^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}(t)x_t^i, x_t^i\rangle + \langle A_{10}(t)x_t^0, x_t^i\rangle + \langle B_0(t), x_t^0\rangle + \langle B_1(t), x_t^i\rangle + C(t)$$

この Y^i に伊藤の公式を適用すれば, Brown 運動の項がそれぞれ $Z_t^{i,0}$ と Z_t^i に対応する：

$$\begin{aligned} Z_t^{i,0} &:= \left\{\Sigma_0^\top (A_{00}(t)x_t^0 + A_{10}(t)^\top x_t^i + B_0(t))\right\}^\top, \\ Z_t^i &:= \left\{\Sigma^\top (A_{10}(t)x_t^0 + A_{11}(t)x_t^i + B_1(t))\right\}^\top \end{aligned} \tag{61}$$

これらを平均場 BSDE(60) のドライバー
$\left(\gamma Z_s^{i,0}\mathbb{E}[Z_s^{i,0}|\mathcal{G}^0]^\top - \frac{\gamma}{2}|\mathbb{E}[Z_s^{i,0}|\mathcal{G}^0]|^2 + \frac{\gamma}{2}|Z_s^i|^2\right)$ に代入した式と
Y^i に伊藤の公式を適用した式の dt 項を比較すると, $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C)$ に関する微分方程式 (Riccati 方程式) に帰着される.

その微分方程式というのが ...

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_{00}(t) &= -\gamma A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t) - \gamma A_{10}(t)^\top \Sigma\Sigma^\top A_{10}(t) + 2K_0 A_{00}(t),\\
\dot{A}_{11}(t) &= -\gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{11}(t) + 2KA_{11}(t),\\
\dot{A}_{10}(t) &= -\gamma A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{00}(t) - \gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top A_{10}(t) + (K_0 + K)A_{10}(t),\\
\dot{B}_0(t) &= \left(-\gamma A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top + K_0\right) B_0(t) - \gamma A_{10}(t)^\top \Sigma\Sigma^\top B_1(t)\\
&\quad - K_0 A_{00}(t) m_0 - K A_{10}(t)^\top m,\\
\dot{B}_1(t) &= \left(-\gamma A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top + K\right) B_1(t)\\
&\quad - \gamma\left(A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{10}(t)^\top \mu_t^1 + A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top B_0(t)\right)\\
&\quad - KA_{11}(t)m - K_0 A_{10}(t) m_0,\\
\dot{C}(t) &= -\frac{\gamma}{2}\langle \Sigma_0^\top B_0(t), \Sigma_0^\top B_0(t)\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle \Sigma^\top B_1(t), \Sigma^\top B_1(t)\rangle\\
&\quad - \langle K_0 B_0(t), m_0\rangle - \langle K B_1(t), m\rangle\\
&\quad + \frac{\gamma}{2}\langle A_{10}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top A_{10}(t)^\top \mu_t^1, \mu_t^1\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{00}(t)\Sigma_0\Sigma_0^\top] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[A_{11}(t)\Sigma\Sigma^\top],\\
A_{00}(T) &= A_{00}^F,\quad A_{11}(T) = A_{11}^F,\quad A_{10}(T) = A_{10}^F,\\
B_0(T) &= B_0^F,\quad B_1(T) = B_1^F,\quad C(T) = C^F.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

これらの観察をまとめると次の定理に帰着される.

Theorem 6.3.2

Assumptions 6.2.1, 6.2.8 に加え，この方程式が $[0, T]$ 上に解を持つとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
Y_t^i &:= \frac{1}{2}\langle A_{00}(t)x_t^0, x_t^0\rangle + \frac{1}{2}\langle A_{11}(t)x_t^i, x_t^i\rangle + \langle A_{10}(t)x_t^0, x_t^i\rangle \\
&\quad + \langle B_0(t), x_t^0\rangle + \langle B_1(t), x_t^i\rangle + C(t), \\
Z_t^{i,0} &:= \left\{\Sigma_0^\top (A_{00}(t)x_t^0 + A_{10}(t)^\top x_t^i + B_0(t))\right\}^\top, \\
Z_t^i &:= \left\{\Sigma^\top (A_{10}(t)x_t^0 + A_{11}(t)x_t^i + B_1(t))\right\}^\top
\end{aligned}
\tag{63}
$$

は平均場 BSDE (60) の解となる.

多人数極限（$N \to \infty$）における均衡について

次にリスクプレミアム過程 θ が $\widehat{\theta}_t := \mathbb{E}[\theta_t|\mathcal{G}_t^0] = -\gamma\mathbb{E}[Z_t^{i,0}|\mathcal{G}^0]^\top$ と満たすとき，漸近的市場均衡 (58) が達成されることを示す．

Theorem 6.3.4

Assumption 6.2.1, 6.2.8 に加え，さらに微分方程式 (62) が $[0, T]$ 上で解を持つとし，$\mathrm{Var}(x_0^1)^{-1} - \gamma A_{11}(0)$ が正定値行列であると仮定する．θ が

$$\widehat{\theta}_t = -\gamma\mathbb{E}[Z_t^{1,0}|\mathcal{F}^0]^\top = -\gamma\Sigma_0^\top\left(A_{00}(t)x_t^0 + A_{10}(t)^\top\mu_t^1 + B_0(t)\right) \tag{64}$$

を満たすならば，

$$p_t^{i,*} := Z_t^{i,0} + \frac{\widehat{\theta}_t^\top}{\gamma}, \quad t \in [0, T]$$

はエージェント-i の最適戦略となり，この戦略のもとで漸近的市場均衡条件 (58) が成立する．

リスクプレミアム過程の導出

線形フィルタリングを用いて θ を導出する上で以下の過程を置く.

Assumption 6.3.6

(i) リスクプレミアム過程 θ は

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t (\alpha_s \theta_s + \beta_s) ds + \int_0^t \zeta_s dW_s^0 + \int_0^t \eta_s dB_s^0, \quad t \in [0, T], \tag{65}$$

に従う. ここで $\alpha \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^{d_0 \times d_0})$, $\beta \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^{d_0})$, $\zeta \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{M}_{d_0})$ 及び $\eta \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^{d_0 \times k})$ である. 初期条件 $\theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P}^0, \mathcal{F}_0^0, \mathbb{R}^{d_0})$ は正規分布 $\theta_0 \sim N(m, v)$ に従うとする. $((m, v) \in \mathbb{R}^{d_0} \times \mathbb{M}_{d_0})$.

(ii) Σ_0 は正則行列である.

(iii) 常微分方程式 (62) は大域解 $(A_{00}, A_{11}, A_{10}, B_0, B_1, C) \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{M}_{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{M}_d) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d_0}) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R}^{d_0}) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$ を持ち, $A_{00}(t)$ は各 $t \in [0, T]$ について正則行列である.

(iv) $\mathrm{Var}(x_0^1)^{-1} - \gamma A_{11}(0)$ は正定値行列である.

Assumption 6.3.6 のもと, $\left\{\mathcal{E}\left(-\int_0^\cdot \theta_s^\top dW_s^0\right)_t ; t \in [0, T]\right\}$ はマルチンゲールになることが示せる. (Lemma 6.3.7.) また, 下記結果はよく知られている.

Lemma 6.3.8 (Kalman-Bucy filtering)

$\widehat{\theta}_t := \mathbb{E}[\theta_t | \mathcal{G}_t^0]$ は次の SDE を満たす:

$$d\widehat{\theta}_t = (\alpha_t \widehat{\theta}_t + \beta_t)dt + (\zeta_t + \varrho_t)d\widehat{W}_t^0, \quad t \in [0, T], \quad \widehat{\theta}_0 = m. \tag{66}$$

ここで $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{M}_{d_0})$ は次の Riccati 方程式で与えられる.

$$\dot{\varrho}_t = \eta_t \eta_t^\top + \alpha_t \varrho_t + \varrho_t \alpha_t^\top - \zeta_t \varrho_t - \varrho_t \zeta_t - \varrho_t^2, \quad t \in [0, T], \quad \varrho_0 = v. \tag{67}$$

今までの観察より, 一定の条件のもとで

$$\widehat{\theta}_t = -\gamma \mathbb{E}[Z_t^{1,0} | \mathcal{F}^0]^\top = -\gamma \Sigma_0^\top \left(A_{00}(t) x_t^0 + A_{10}(t)^\top \mu_t^1 + B_0(t) \right)$$

は市場均衡をもたらす. 伊藤の公式を使い, 係数を

$$d\widehat{\theta}_t = (\alpha_t \widehat{\theta}_t + \beta_t) dt + (\zeta_t + \varrho_t) d\widehat{W}_t^0$$

と比較することで, $\alpha, \beta, \zeta, \eta$ を導出できる.
これによって市場均衡を達成するリスクプレミアム

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t (\alpha_s \theta_s + \beta_s) ds + \int_0^t \zeta_s dW_s^0 + \int_0^t \eta_s dB_s^0$$

を求めることができる.

Theorem 6.3.9

Assumptions 6.2.1,6.2.8,6.3.6 に加え，さらに θ_0 の平均 $m(:= \mathbb{E}[\theta_0])$ と θ の係数関数 $(\alpha, \beta, \zeta, \eta)$ が

$$
\begin{aligned}
m &= -\gamma\Sigma_0^\top\left(A_{00}(0)x_0^0 + A_{10}(0)^\top\mathbb{E}[x_0^1] + B_0(0)\right),\\
\alpha_t &= \Sigma_0^\top\dot{A}_{00}(t)A_{00}^{-1}(t)(\Sigma_0^\top)^{-1} - K_0 I_{d_0}, \quad t \in [0, T],\\
\beta_t &= \gamma\alpha_t\Sigma_0^\top(A_{10}(t)^\top\mu_t^1 + B_0(t)) - \gamma\Sigma_0^\top(K_0A_{00}(t)m_0\\
&\qquad + \dot{A}_{10}(t)^\top\mu_t^1 + A_{10}(t)^\top\dot{\mu}_t^1 + \dot{B}_0(t)), \quad t \in [0, T],\\
\dot{\zeta}_t &= -\zeta_t^2 + \alpha_t\zeta_t + \zeta_t\alpha_t^\top - \eta_t\eta_t^\top - \gamma^2\Sigma_0^\top A_{10}(t)^\top\Sigma\Sigma^\top A_{10}(t)\Sigma_0, \quad t \in [0, T],\\
\zeta_0 &= -\gamma\Sigma_0^\top A_{00}(0)\Sigma_0 - v.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

を満たすとし，かつ，このような ζ は well-defined とする．エージェントが

$$
p_t^{i,*} := (\pi_t^{i,*})^\top\sigma_t := Z_t^{i,0} + \frac{\widehat{\theta}_t^\top}{\gamma}, \quad t \in [0, T], \quad i \in \mathbb{N}, \tag{69}
$$

を最適戦略として採用しているとき，漸近的市場均衡条件 (58) が成立する．ここで，$Z^{i,0}$ は (63) で与えられ $\widehat{\theta}_t := \mathbb{E}[\theta_t|\mathcal{G}_t^0]$ である．

数値計算例

以上の内容をもとに数値計算を実施した．$N = 5000$, $T = 1$ とし，簡単のため $d_0 = d = k = 1$ とした．さらに各パラメータを

γ	K_0	K	m_0	m	Σ_0	Σ
1.5	0.05	0.05	-0.5	-0.5	0.3	0.3

A^F_{00}	A^F_{11}	A^F_{10}	B^F_0	B^F_1	C^F
0.7	0.2	0.3	-1.3	-0.7	1.2

とした．

下図は ODEs (62) の数値計算結果である.

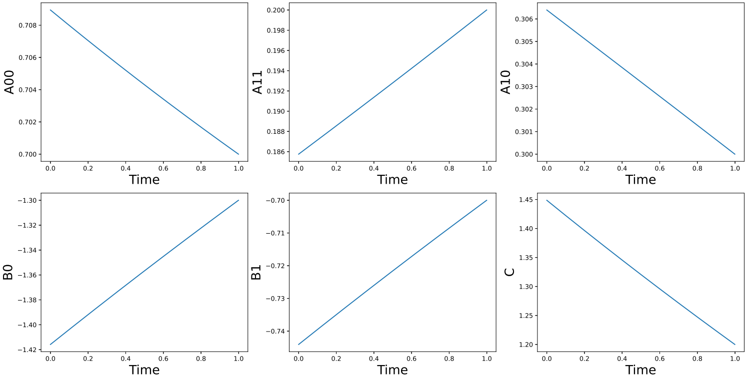


Figure: Solutions of Eq.(62)

さらに $x_0^i \sim N(-0.7, 0.5)$, $\xi^i \sim N(2, 0.3)$, $(i = 1, \ldots, 5000)$, $v = 0.1$, $x_0^0 = 0$, $\sigma_t \equiv 0.2$, $\eta_t = (t - 0.6)\mathbb{1}_{[0.6,1]}(t)$ とした．Figure 2 はリスクプレミアム θ (blue solid line) と推定されたリスクプレミアム $\widehat{\theta}$ (orange dashed line) のサンプルパスを表す．Figure 3 は $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \pi_t^{i,*}$ であり漸近的に市場が均衡している状態を表している．

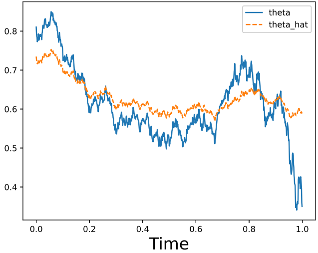


Figure: Market risk premium process

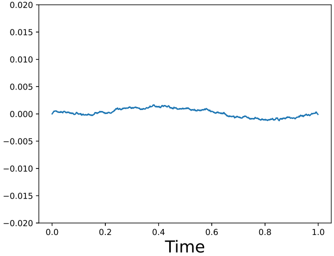


Figure: Asymptotic market clearing

エージェントの時刻 0 における資産 $(\xi^i)_{i=1,\dots,5000}$ の分布と時刻 T における資産 $(\mathcal{W}_T^{i,p^{i,*}})_{i=1,\dots,5000}$ の分布が Figure 4 に示されている.

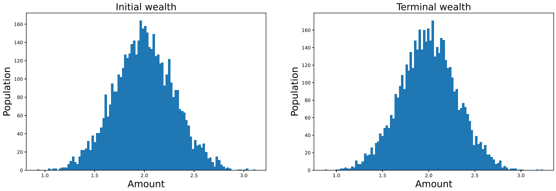


Figure: Initial and terminal wealth

負債と $(F^i)_{i=1,\dots,5000}$ 純資産 $(\mathcal{W}_T^{i,p^{i,*}} - F^i)_{i=1,\dots,5000}$ の分布が Figure 5 である.

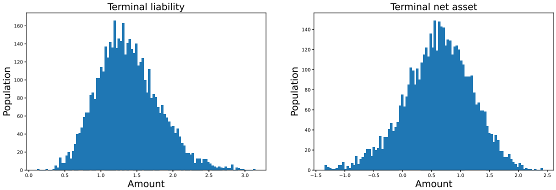


Figure: Terminal liability and net asset

Chapter 6 のまとめ

- 部分観測市場のモデル化を行い、その市場での指数効用最大化問題を分析した.
- EQG モデルの枠組みで均衡モデルを提示し, 平均場 BSDE の解の分析をした.
- 線形フィルタリング理論を用いて直接観測できないリスクプレミアム過程の内生的導出を行った.
- 簡単な数値計算例を提示して, モデルの可視化を試みた.

Chapter 7. Concluding Remarks

まとめ：本研究の概要

- Chapter 4: 基本モデルの提示
    - 多数の異質エージェントにより構成される不完備市場における均衡リスクプレミアム過程について分析した.
- Chapter 5 & 6: 基本モデルの拡張
    - 基本モデルの拡張を行い, 半解析解の導出や数値シミュレーションを可能にした.
    - これにより各種パラメータが均衡に与える影響を分析しやすくなった.
- 本研究の意義
    - 多数の異質なエージェントの相互作用により証券のリスクプレミアムが形成される様子を数理的に記述した.
    - 既存の資産価格形成理論に比して, より現実の市場に近い設定での分析を実現したと言える.

まとめ：平均場 BSDE について

- 本モデルの鍵
  - 資産価格モデルの構築においては、新しい形式の「平均場 BSDE」が現れる.
  - 各章における平均場 BSDE の解析は本研究において重要な位置を占める.
- 数学的課題
  - この平均場 BSDE の可解性は限られた条件下でしか示せていない.
  - 例: 終端条件やドライバーが十分小さい. または終端条件が特殊な形式をしている.
  - 本方程式の一般的性質の解析が今後の重要な課題になるだろう.

まとめ：今後の展望と課題

- 他の効用関数への応用
  - Hu, Imkeller, & Müller (2005) の手法は指数型効用以外のクラス（冪型効用や再帰型効用など）にも適用可能
  - 他の効用関数の場合、最適取引戦略は資産過程に依存することとになる.
  - そうなると平均場 BSDE ではなく, 平均場 FBSDE が出現する.
  - 現時点では、強い仮定を置いたとしても、そのような複雑な方程式の可解性を証明することは困難.
- ボラティリティ σ の内生的導出
  - 次スライドで説明する.

課題：ボラティリティの導出

本研究では証券の均衡リスクプレミアムの導出をしたが, 価格 S_t 自体は内生的に与えられていない.
→ 特にリターン μ やボラティリティ σ のそれぞれはモデル内で内生的に導出できていない.

これは完備市場における資産価格モデルにおいても同様の観察が得られている. (Karatzas & Shereve (1998))
Karatzas & Shereve (1998) ではその原因を,「株式をポートフォリオで置き換えられるから」と指摘している. 以下に詳しくみてみる.

均衡価格 vs 均衡リスクプレミアム

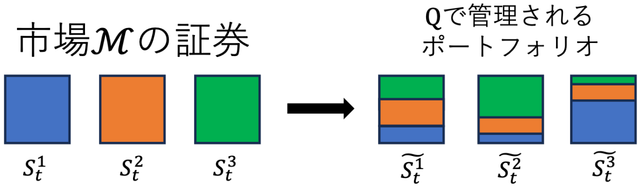
市場 $\mathcal{M} = (\mu, \sigma, S_0)$:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_r)(\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]. \tag{70}$$

$q_1(t), \ldots, q_n(t)$: n 個の線型独立な投資戦略 (各証券に投資される金額の割合を表す).
$Q_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を

$$Q_t := (q_1(t) \ldots q_n(t))^\top, \quad t \in [0, T]$$

で定める. (Q_t, Q_t^{-1} は有界とする)
このとき, Q で管理される n 個のポートフォリオ $\widetilde{S}$ を考える.



均衡価格 vs 均衡リスクプレミアム

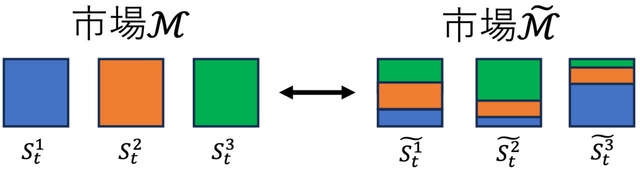
このとき, $\widetilde{S}$ のダイナミクスは

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(\widetilde{S}_r) Q_r (\mu_r dr + \sigma_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]$$

で表せる. $\widetilde{\mu}_t := Q_t \mu_t$, $\widetilde{\sigma}_t := Q_t \sigma_t$ とおけば,

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(\widetilde{S}_r)(\widetilde{\mu}_r dr + \widetilde{\sigma}_r dW_r^0), \quad t \in [0, T]$$

とかける. $\widetilde{S}$ を原資産とする新しい市場 $\widetilde{\mathcal{M}} = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}, \widetilde{S}_0)$ を考えることができる.



均衡価格 vs 均衡リスクプレミアム

市場 $\widetilde{\mathcal{M}}$ のリスクプレミアム ($\widetilde{\theta}$ とおく) は

$$\widetilde{\theta}_t := \widetilde{\sigma}_t^\top (\widetilde{\sigma}_t \widetilde{\sigma}_t^\top)^{-1} \widetilde{\mu}_t = \sigma_t^\top Q_t^\top (Q_t \sigma_t \sigma_t^\top Q_t^\top)^{-1} Q_t \mu_t = \sigma_t^\top (\sigma_t \sigma_t^\top)^{-1} \mu_t = \theta_t$$

となる．つまり市場 $\mathcal{M}$ のリスクプレミアムと市場 $\widetilde{\mathcal{M}}$ のリスクプレミアムは同じであることがわかる．
さらに，市場 $\widetilde{\mathcal{M}}$ での最適投資問題と，市場 $\mathcal{M}$ での最適投資問題も一致することが示せる．

均衡価格 vs 均衡リスクプレミアム

定性的観察

- もし θ が市場 $\mathcal{M}$ の均衡を達成するのなら, 市場 $\widetilde{\mathcal{M}}$ での均衡も達成するということがわかる.
- 特に (μ, σ) と $(\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma})$ のそれぞれの違いは均衡モデルに影響しない.
- 直感的に考えれば, 本研究のように取引コストや流動性への制限を課さないモデルにおいては市場 $\mathcal{M}$ で π の取引をするのと市場 $\widetilde{\mathcal{M}}$ で $(Q_t^{-1})^\top \pi$ の取引をするのとでは結局同じこと

均衡価格 vs 均衡リスクプレミアム

もし取引コストや流動性への制限を課したモデルを考えれられれば，より興味深い結果が得られるかもしれない．例えば

- 取引コスト付きの最適投資問題
- 板のモデリング

など．これらの研究結果を応用した均衡モデルを考えてみたい．(ただ同時により高度な数学的問題に直面することになることも予想される.)