

論文の内容の要旨

Mean Field Equilibrium Asset Pricing Models

With Exponential Utility

(指数型効用における平均場均衡資産価格形成モデル)

関根 雅

本論文は、不完備な金融市場における証券リスクプレミアムの形成メカニズムを、平均場ゲーム理論 (Mean Field Game Theory) の枠組みを用いて解明することを目的とする。具体的には多数の異質な投資家が、それぞれ個々の効用を最大化するような取引戦略を執行する場合において、証券のリスクプレミアムが市場均衡を通じて内生的に形成される過程をモデル化し、その分析を行う。市場均衡の分析においては新しい型の平均場二次成長型後退確率微分方程式が現れるが、本論文では一定の条件下におけるその方程式の可解性について議論するとともに、その方程式の解を用いて表現されるリスクプレミアム過程が漸近的な市場均衡を達成することを証明した。

背景と問題意識

金融市場は、多数の投資家が自身の利得を最大化するために日々取引を行う「多人数ゲーム」の場として捉えることができる。しかし、従来の数理ファイナンスや金融経済学のモデルでは、市場環境は外生的に仮定されることが多かった。これらのモデルでは、所与とした市場環境に対して投資家がどのように行動するかは分析できるものの、そうした投資家の行動自体が全体として市場にどう影響するかまでは分析できない。このような状況を捉えるためには、投資家間の相互作用を考慮しながら市場環境、特に資産価格が内生的に決定される過程を記述するモデルが必要となる。また、従来の資産価格形成モデルでは、代表的個人の存在を仮定することが多いが、この仮定では個々の投資家が異なる情報やリスク選好に基づいて多様な投資戦略を採用する現実の状況を十分に描写することができないという問題がある。

こうした課題を克服するためには、多数の異質な投資家が競争的または協力的な行動をとる中で、資産価格がどのように形成されるかを内生的に記述する、多人数ゲームの枠組み

による理論モデルが必要となる。しかし、多人数ゲームにおける均衡の厳密な求解は複雑に連立した最適制御問題につながり、数学的に極めて困難な問題となる。

平均場ゲーム理論の導入と本論文の研究手法

多人数ゲーム問題に対する強力なツールとして、Lasry & Lions (2007) や Huang, Malhamé & Caines (2006) がそれぞれに独立に「平均場ゲーム理論」を提唱した。この理論では多人数ゲームを、一定の仮定のもとで一人のプレイヤーの最適制御問題と、システム全体の状態に関する固定点問題に置き換えることで、解析を可能にした。また平均場ゲームの解が、一定の仮定のもとで元の多人数ゲームのナッシュ均衡の近似解を提供することも知られている。

平均場ゲーム理論には、主に 2 つの分析アプローチがある。一つは、Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) 方程式と Fokker-Planck (FP) 方程式からなる連立非線形偏微分方程式を用いる解析的アプローチであり、もう一つは、Carmona & Delarue (2013) による、前進後退確率微分方程式 (Forward-Backward Stochastic Differential Equations, FBSDEs) を用いて定式化する確率論的アプローチである。

本論文では、平均場ゲーム理論を用いて不完備市場における資産価格形成モデルを構築することを目的としている。平均場ゲーム理論を資産価格形成理論に応用した既存の研究では、Carmona & Delarue (2013) による確率論的アプローチを採用し、市場均衡を達成する証券価格を McKean-Vlasov 型の FBSDE によって特徴付けている。しかし、FBSDE の解の存在や一意性は Peng & Wu (1999) の研究結果の様な幾つかのケースに限られている。したがって既存の資産価格形成理論の研究においても FBSDE の可解性を保証するために、効用関数 (コスト関数) や市場のダイナミクスについて強い仮定を置く必要があった。特に、この枠組みでは経済学において一般的に用いられる指数型、冪型、対数型といったクラスの効用関数を扱うことは出来なかった。

本論文はこの問題を克服するため、Hu, Imkeller & Müller (2005) によって開発された最適マルチンゲール法 (optimal martingale method) を採用する。この手法は指数型、冪型、対数型といった標準的な効用関数クラスの動学的確率的最適化問題に適用可能であり、また最適制御を特徴づける方程式として、FBSDE ではなく BSDE を扱う。特に指数型効用の最適化に際しては二次成長型 BSDE (quadratic-growth BSDE, qg-BSDE) が現れる。なお、qg-BSDE の可解性に関する結果は Kobylanski (2000) がよく知られている。Hu, Imkeller & Müller (2005) の手法は本研究の目的である指数型効用関数を持つ投資家の最適化問題を解き、かつその結果を均衡モデルに拡張する上で極めて有効である。

本論文の目的と主要な貢献

本論文では、平均場ゲーム理論を応用して不完備市場における資産価格モデルを構築することを目的としている。特に投資家が指数型効用関数 (exponential-type utility function)

を持ち、かつ効用関数におけるパラメータについて異質である状況を考える。本論文の主要な貢献は以下の通りである。

1) 新しい型の平均場 qg-BSDE とその解の存在証明

多人数極限における市場均衡を特徴付ける平均場 qg-BSDE を導出し、また一定の条件下におけるその方程式の解の存在を証明した。この平均場 qg-BSDE は、ドリフト項において確率積分項の被積分確率過程とその確率過程の条件付期待値の両方に関して二次成長の特性を持つ、新しい型の方程式である。

2) 市場均衡条件の検証

全ての投資家がそれぞれ各自の最適取引戦略を執行する場合に、上記の平均場 qg-BSDE の解によって特徴付けられるリスクプレミアム過程が、多人数極限において市場均衡条件（需給一致条件）を漸近的に達成することを証明した。

3) 半解析的解の導出

特殊な枠組み(Exponential Quadratic Gaussian framework)で均衡モデルを再定式化し、平均場 qg-BSDE の解が連立 Riccati 型常微分方程式の解を用いて半解析的に表現できることを示した。特にこの枠組みの導入により、均衡モデルの数値解析が可能となった。

4) モデルの拡張: 以下の 2 つのモデルを構築した。

A. 消費習慣形成を考慮した均衡モデル: 投資家の消費行動と消費習慣形成 (habit formation) をモデルに組み込み、均衡におけるリスクプレミアム過程を内生的に導出した。

B. 部分観測市場における均衡モデル: 投資家が市場の情報を完全には観測できない市場(部分観測市場)における均衡を考え、Kalman-Bucy フィルター理論を用いて、そのような市場におけるリスクプレミアム過程を内生的に導出した。

論文の構成

本論文は 7 つの章で構成され、3 つの新しい資産価格形成モデルを提示する。まず第 1 章では本研究の背景や着想に至った経緯、方法論や目的を紹介する。第 2 章では、本論文を通して頻繁に使用される関数空間などの記法を定義する。第 3 章では、本研究分野における先行研究を概観する。特に、Fujii & Takahashi (2022) による研究を詳細にレビューするとともに本論文の研究との違いを説明することで、本研究の動機と独自性を明確にする。第 4 章は、Fujii & Sekine (2024) に基づき、本論文の基本モデルとなる不完備市場における平均場均衡価格形成モデルを構築する。この章では、指数型効用関数を持つ異質な投資家を想定し、最適マルチンゲール法を用いて各投資家の最適投資問題を解く。さらに、均衡を特徴付ける平均場 qg-BSDE を導出し、その可解性について議論し、市場均衡条件を漸近的に満たすリスクプレミアム過程を内生的に導出する。

第5章は、Fujii & Sekine (2025) に基づき、第4章のモデルを拡張し、投資家の消費行動と消費習慣形成を考慮したモデルを構築する。この投資家の消費行動を加味した場合、Hu, Imkeller & Müller (2005) で提示された手法はそのままでは適用できず、一定の工夫をする必要がある。なおモデルにおいても、同様のタイプの平均場 BSDE が導出され、その可解性を証明する。さらに、EQG の枠組みを用いて半解析的な解を導出する。

第6章は、Sekine (2025) に基づき、第4章のモデルをさらに拡張し、投資家が市場情報を部分的にしか観測できないモデルを構築する。Kalman-Bucy フィルターを用いてリスクプレミアムを推定する状況をモデルに組み込み、そのような市場において均衡リスクプレミアムがどのように形成されるかを分析する。この章では、簡単な数値シミュレーションを通じて、モデルのダイナミクスを視覚的に提示する。最後に第7章では、論文全体の要約を行い、構築したモデルの利点と限界、そして今後の研究課題について議論する。

参考文献

- R. Carmona and F. Delarue. Probabilistic analysis of mean-field games. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(4):2705–2734, 2013.
- M. Fujii and M. Sekine. Mean-field equilibrium price formation with exponential utility. *Stochastics and Dynamics*, 24(08), 2024.
- M. Fujii and M. Sekine. Mean field equilibrium asset pricing model with habit formation. *Asia-Pacific Financial Markets*, 2025.
- M. Fujii and A. Takahashi. A mean field game approach to equilibrium pricing with market clearing condition. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 60(1):259–279, 2022.
- Y. Hu, P. Imkeller, and M. Müller. Utility maximization in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 15(3):1691–1712, 2005.
- M. Huang, R.P. Malhamé, and P.E. Caines. Large population stochastic dynamic games: Closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. *Communications in Information and Systems*, 6(3):221–252, 2006.
- J.M. Lasry and P.L. Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1):229–260, 2007.
- S. Peng and Z. Wu. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(3), 825–843, 1999.
- M. Sekine. Mean field equilibrium asset pricing model under partial observation: an exponential quadratic Gaussian approach. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 42, 853–878, 2025.